

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 61240 Kamnik,  
št. žiro računa: 50140 – 603 – 57434

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri Ministrstvu za informiranje pod registrsko številko 949. Po mnenju Ministrstva za informiranje št. 23/89–92 šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira Ministrstvo za šolstvo in šport

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič in Aleš Vavpetič

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorji: DZS d.d., Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o.

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 3500 izvodov

© 1994 LOGIKA d.o.o.

ISSN 0354 – 0359

**LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA**  
letnik IV, št. 1, 1994/95

Cena revije: v prosti prodaji 330 SIT, za naročnike 275 SIT in vključuje 5% prometni davek

## UVOD V LOGIKO Z VITEZI IN OPRODAMI

Nekje daleč na oceanu obstaja otok, na katerem nekateri prebivalci, imenovani *vitezi*, vedno govore *resnico*, drugi, imenovani *oproda*, pa vedno *lažejo*. Drugih prebivalcev na tem otoku ni.

1. Recimo, da prebivalec *A* izjavi: " $2 + 2 = 4$ ." Kaj je prebivalec *A*, vitez ali oproda?
2. Kaj pa, če prebivalec *A* izjavi: "Vitez sem.?"
3. Ali lahko prebivalec izjavi, da je oproda?
4. Tokrat imamo opravka s tremi prebivalci, ki jih označimo z *A*, *B*, *C*. Nekoč so dejali:
  - A*: *C* je star 10 let.
  - B*: *C* je star 12 let.
  - C*: Star sem 15 let.
 Oцени število oprod med temi tremi prebivalci.
5. Zdaj imamo opravka s tremi drugimi prebivalci *A*, *B* in *C*. Nekoč so izjavili:
  - A*: *B* je starejši od 20 let.
  - B*: Star sem 20 let.
  - C*: *B* je mlajši od 20 let.
 Oцени število oprod med to trojico.
6. Zopet nastopata le dva prebivalca, *A* in *B*. Rekla sta tole.
  - A*: Na otoku je zlato.
  - B*: To ni res.
 Koliko oprod je med njima?
7. Dva otočana, *A*, *B*, sta dala tile izjavi:
  - A*: Na otoku je zlato in srebro.
  - B*: To ni res. Na otoku ni vsaj ene od teh dveh kovin.
 Kaj lahko sklepamo?
8. Tokrat sta dva druga otočana (spet ju imenujmo *A*, *B*), dala izjavi:
  - A*: Na otoku ni ne zlata ne srebra.
  - B*: To ni res. Na otoku je vsaj ena od teh dveh kovin.
 Kaj lahko sklepamo?
9. Tokrat imamo izjavo otočana *A*:
  - A*: Midva z *B*-jem sva oprodi.
 a) Dokaži, da je *A* oproda.  
b) Dokaži, da je *B* vitez.

10. O hišni številki otoškega vrača so otočani  $A$ ,  $B$  in  $C$  izjavili:

$A$ : Je večja kot 15.

$B$ : Je manjša kot 20.

$C$ : Je večkratnik števila 7.

Oceni število oprod.

11. Poročeni otočan  $A$  je tokrat dejal:

$A$ : Z ženo sva oba enakega stanu.

(Da sta enakega stanu, pomeni, da sta oba oprod ali oba viteza.)

Kaj lahko sklepaš?

12. Recimo, da poročeni otočan izjavi o zakoncu:

Vsaj eden od naju je oprod.

Kaj lahko poveš o otočanu in njegovi ženi?

13. Tokrat sta otočana  $A$  in  $B$  dala tile izjavi:

$A$ :  $B$  je star več kot 15 let.

$B$ : Star sem več kot 10 let.

Recimo, da je  $A$  vitez. Kaj lahko sklepaš o  $B$ -ju?

14. Zdaj pa otočan  $A$  izjavi:

$A$ :  $2 + 2 = 5$  ali pa je  $2 + 2 = 4$ .

Kaj je otočan  $A$ ?

15. Predpostavimo, da  $A$  izjavi: "Če sem jaz vitez, je  $B$  oprod."

Kaj lahko sklepamo?

16. Predpostavimo, da  $A$  izjavi: "Če je  $B$  oprod, potem sem jaz vitez."

Kaj sta  $A$  in  $B$ ?

17. Kaj pa, če je  $A$  izjavil: "Če  $B$  ni oprod, potem jaz nisem vitez."?

18. Kaj pa, če  $A$  reče: "Če jaz nisem vitez, potem  $B$  ni oprod."

Več o vitezi in oprodah najdete v knjigi R. Smullyana, *Poznate naslov te knjige?*, ki je izšla v slovenskem prevodu leta 1987 pri DZS.

## Rešitve nalog

1. Prebivalec  $A$  je izjavil resnico, zato je vitez.
2. Če prebivalec reče, da je vitez, potem je lahko vitez, ki govori resnico, lahko pa je oprod, ki se je zlagal, da je vitez.
3. Noben prebivalec otoka ne more zase izreči, da je oprod. Če bi to izrekel vitez, bi se lagal (toda vitezi ne lažejo). Če to izjavi oprod, bi govoril resnico (toda opode nikoli ne izjavijo resnice).
4. Tokrat so izjave treh prebivalcev takšne, da je lahko resnična samo ena med njimi, lahko pa so vse tri lažne. Število oprod je 2 ali 3.  
*Razmislek:* Če imamo dve izjavi, ki ne moreta biti hkrati resnični, lahko pa sta obe neresnični, govorimo o *izključujočih* se izjavah. S tujko rečemo, da sta izjavi *kontrarni*. Če imamo opravka z več kot dvema izjavama, lahko govorimo o množici *med seboj izključujočih* se izjav, če se vsaka dvojica izjav v tej množici izključuje. Izjave " $C$  je star 10 let.", " $C$  je star 12 let." in " $C$  je star 15 let." so med seboj izključujoče.
5. Zdaj so izjave treh otočanov izključujoče, toda ena med njimi je zagotovo resnična. Zato imamo dve oprod in enega viteza, ne moremo pa reči, kdo je kaj.  
*Razmislek:* Kadar imamo opravka z množico izjav, med katerimi je zagotovo vsaj ena resnična, govorimo o množici *dopolnjujočih* se izjav (s tujko – o *komplementarnih* izjavah). Takšna je naslednja množica izjav: " $C$  je starejši od 15 let.", " $C$  je mlajši od 20 let."  
Množica izjav iz naše naloge: " $B$  je starejši od 20 let.", " $B$  je star 20 let.", " $B$  je mlajši od 20 let.", pa ima lastnost, da se izjave dopolnjujejo in medsebojno izključujejo. Pravimo, da gre za *izključujoče dopolnjevanje* (ali – *disjunktivno komplementarnost*).
6. Otočan  $B$  je *zanikal* izjavo otočana  $A$ . Če je izjava otočana  $A$  resnična, potem je izjava otočana  $B$  lažna, če je izjava otočana  $A$  lažna, je izjava otočana  $B$  resnična. Opravka imamo z enim vitezom in enim oprod, ne moremo pa povedati, kaj je kateri.  
*Razmislek:* Tudi tokrat imamo opravka z množico izjav, ki se izključujejo in dopolnjujejo. Hkrati pa sta v tej natanko dve izjavi. Govorimo o dveh *nasprotujočih si* izjavah, s tujko pa o *kontradiktornih* izjavah. Izjava in njeno zanikanje (*negacija*) tvorita kontradiktoren par izjav.
7. Otočan  $A$  trdi, da je na otoku zlato in da je na otoku srebro. Če je  $A$  vitez, potem sta na otoku obe dragoceni kovini. Otočan  $B$  pa je oprod. Če je  $A$  oprod, potem je  $B$  vitez in ni res, da sta na otoku zlato in srebro. Lahko, da ni zlata, lahko, da ni srebra, lahko pa da ni nobene od obeh kovin.
8. Če je otočan  $A$  vitez, na otoku ni ne zlata in ne srebra. Če pa je na otoku vsaj ena od teh dveh kovin, je  $A$  oprod. Otočan  $B$  je nasprotne sorte od  $A$ -ja.  
*Razmislek:* Sestavljeni izjavi, s katero trdimo resničnost dveh izjav, imenujemo *konjunkcija* teh dveh izjav. Konjunkcija dveh izjav je resnična, če sta resnični obe izjavi, ki jo sestavljata. Konjunkcija pa je neresnična, če je neresnična vsaj ena izjava, ki jo sestavlja. Izjava "Na otoku je zlato in srebro." je konjunkcija izjav "Na otoku je zlato." in "Na otoku je srebro.".

Sestavljeni izjavi, s katero trdimo, da je resnična vsaj ena izmed dveh izjav, pravimo *disjunkcija* teh dveh izjav. Disjunkcija dveh izjav je neresnična, če sta neresnični obe izjavi, ki jo sestavljata.

Disjunkcijo izjav "Na otoku je zlato." in "Na otoku je srebro." bomo zapisali "Na otoku je zlato ali na otoku je srebro." ali "Na otoku je zlato ali srebro."

9. Dokazati moramo, da je  $A$  oproda.

Vzemimo *nasprotno* izjavo, to je, da je  $A$  vitez. Ker pa vitezi govorijo resnico, je izjava, da sta  $A$  in  $B$  oprodi, resnična. Zato je oproda tudi sam  $A$ . Otočan  $A$  je hkrati vitez in oproda. To je *protislovje*. *Predpostavka*, da je  $A$  vitez, nas je pripeljala do protislovja, zato je ta predpostavka neresnična.  $A$  je torej oproda.

Ker je  $A$  oproda, ni res da sta z  $B$ -jem oba oprodi. Vsaj en je vitez, toda  $A$  to ni. Torej je  $B$  vitez.

*Razmislek*: Izjavi, ki ne more biti resnična, pravimo *protislovje*. Konjunkcija izjave in njene negacije je protislovje.

O *protislovni množici* izjav govorimo, če lahko iz te množice izpeljemo protislovje. Enako bi lahko govorili o protislovni množici, če bi iz nje lahko izpeljali neko izjavo in njeno negacijo.

Pri reševanju naloge smo dokazali, da je  $A$  oproda tako, da smo predpostavili nasprotno, da je  $A$  vitez in izpeljali protislovje (da je  $A$  hkrati vitez in oproda). Temu sklepanju pravimo *dokazovanje s protislovjem* (latinsko: *reductio ad absurdum*). Drugi izraz za takó dokazovanje je *indirektni dokaz*, saj namesto neposrednega dokaza, da je  $A$  oproda, dokažemo protislovnost nasprotne izjave.

10. Izjave "Je večja od 15.", "Je manjša od 20." in "Je večkratnik števila 7." ne morejo biti hkrati resnične. Prvi dve sta *izpolnjeni* pri vrednostih 16, 17, 18 in 19. Toda nobeno od teh števil ni večkratnik števila 7. Hkrati pa sta po dve izjavi iz te trojice hkrati izpolnjeni.

Zato je med trojico vsaj en oproda. Ker pa sta izjavi  $A$ -ja in  $B$ -ja dopolnjujoči (če predpostavimo, da tudi na tem otoku označujejo hiše z naravnimi števili), je med dvojico  $A$  in  $B$  vsaj en vitez.

*Razmislek*: Izjave  $A$ -ja,  $B$ -ja in  $C$ -ja ne morejo biti hkrati izpolnjene (resnične). Taki množici izjav pravimo, da je *nezdružljiva*. Če je neka množica izjav *nezdružljiva*, se vseeno lahko zgodi, da je poljubna njena prava podmnožica izjav *združljiva* (*kompatibilna*).

Če je neka množica izjav *nezdružljiva*, potem lahko izpeljemo iz nje protislovje. Zato taki množici izjav rečemo tudi protislovna množica izjav.

Množica medseboj kontrarnih izjav je seveda protislovna. Obratno pa ni nujno res.

11.  $A$  je vitez ali oproda.

Recimo, da je  $A$  vitez. Potem sta z ženo oba viteza, ker je res, da sta enakega stanu.

Recimo, da je  $A$  oproda. Potem nista enakega stanu in ker je  $A$  oproda, je njegova žena vitez.

$A$ -jeva žena je torej vitez, ne moremo pa sklepati o  $A$ -ju.

*Razmislek*: Zgoraj smo sklepali takole:

$A$  je vitez ali oproda.

Če ja  $A$  vitez, je  $A$ -jeva žena vitez.

Če je  $A$  oproda, je njegova žena vitez.

Njegova žena je vitez.

Takšnemu sklepanju pravimo *dokazovanje z analizo primerov*. Najprej imamo neko dopolnjujočo množico pogojev ( $A$  je vitez,  $A$  je oproda). Iz vsakega pogoja lahko izpeljemo isto

izjavo (Njegova žena je vitez.) Potem je ta izpeljana izjava resnična.

12. Izjava "Vsaj eden od naju je oproda" je disjunkcija izjav "Jaz sem oproda." in "Moja žena je oproda."

Pokažimo, da  $A$  ne more biti oproda. Če bi bil oproda, bi bilo res, da je med njima vsaj en oproda. Imeli bi oprodo, ki govori resnico.

$A$  je torej vitez, zato je res, da je med njima vsaj en oproda. Ker pa  $A$  ni oproda, mora biti oproda njegova žena.

13. Izjavi  $A$ -ja in  $B$ -ja sta v takšnem odnosu, da iz resničnosti prve sledi resničnost druge. Če je  $B$  star več kot 15 let, potem je gotovo star več kot 10 let. Ker je po predpostavki  $A$  vitez, je vitez tudi  $B$ .

Če pa bi bilo dano, da je  $B$  vitez, potem o  $A$ -jevemu stanu ne bi mogli sklepati ničesar.

14. Izjava oblike  $p$  ali  $q$  je resnična, če je resnična vsaj ena od izjav  $p$  oziroma  $q$ . Ker je izjava  $2 + 2 = 4$  resnična, je  $A$  vitez.

Kaj pa, če bi  $A$  dejal:  $2 + 2 = 5$  in  $2 + 2 = 4$ ? Tedaj bi bil oproda.

15. Predpostavimo, da je  $A$  vitez. Potem je res: "Če je  $A$  vitez, je  $B$  oproda." Zato je  $B$  oproda, saj je  $A$  vitez.

Pri predpostavki, da je  $A$  vitez, smo izpeljali, da je  $B$  oproda. Torej je res: "Če je  $A$  vitez, potem je  $B$  oproda." In ker je  $A$ -jeva trditev resnična, je  $A$  vitez. Ker pa je  $A$  vitez, je  $B$  oproda.

Izjavi oblike "Če  $p$ , potem  $q$ ." pravimo *pogojna izjava*. Izjavi  $p$  pravimo *pogoj*, izjavi  $q$  pa *posledica*. Pogojna izjava je *neresnična samo* v primeru, če je izjava  $p$  resnična,  $q$  pa neresnična.

Pri sklepanju s pogojnimi izjavami pogosto uporabljamo *pravilo sklepanja*, ki mu rečemo *modus ponens*: Iz " $p$ " in "Če  $p$ , potem  $q$ " sledi " $q$ ".

Drugo pravilo pa je *pravilo uvedbe pogojne povezave*: če pri predpostavki " $p$ " izpeljemo izjavo " $q$ ", potem smo dokazali izjavo "Če  $p$ , potem  $q$ ".

Obe pravili smo uporabili pri sklepanju v naši nalogi.

16. Izjava: "Če je  $B$  oproda, potem je  $A$  vitez", je napačna samo v primeru, če sta oba oprodi. Če je  $A$  vitez, je  $B$  lahko karkoli.

Izjava oblike "Če  $q$ , potem  $p$ " je *obrat* (ali obratna izjava) izjave "Če  $p$ , potem  $q$ ". Iz zadnjih dveh nalog sklepamo, da izjava in njen obrat *nista enakovredni* izjavi.

17. Recimo, da  $A$  ni vitez. Potem je njegova izjava napačna, to pa je samo v primeru, če  $B$  ni oproda,  $A$  pa je vitez. To je v protislovju s predpostavko.  $A$  je torej vitez. Ker je izjava "Če  $B$  ni oproda, potem  $A$  ni vitez." resnična, ni res, da  $B$  ni oproda. Torej  $B$  je oproda.

Dobili smo isti rezultat kot pri nalogi 15. Izjavi "Če ni  $q$ , potem ni  $p$ ." pravimo *kontrapozicija* izjave "Če  $p$ , potem  $q$ ". Pogojna izjava in njena kontrapozicija *sta enakovredni*.

Izjavi "Če ni  $p$ , potem ni  $q$ ." pravimo, da je *inverzna* k izjavi "Če  $p$ , potem  $q$ ". Inverzna izjava je kontrapozicija obratne izjave in je zato enakovredna obratni izjavi. Dokaži to na primeru 16. naloge.

18. Isto kot 16. naloga.