Rešitev 7. Če namesto premikanja po diagonali od treh možnih potez iz naloge 5 ukinemo premikanje na levo (in se tako lahko premikamo le še za eno dol ali po diagonali), dobimo sledečo sliko:

7	A	A	A	A	A	A	A	A
6	B	B	B	B	B	B	B	∅
5	A	A	A	A	A	A	∅	∅
4	B	B	B	B	B	∅	∅	∅
3	A	A	A	A	∅	∅	∅	∅
2	B	B	B	∅	∅	∅	∅	∅
1	A	A	∅	∅	∅	∅	∅	∅
0	☼	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
	0	1	2	3	4	5	6	7

Prečrtana ničla pomeni, da fižolček na tem polju lahko pripelje le do remija, saj zaradi onemogočenega gibanja na levo ne moremo pripeljati fižolčka do polja (0,0).

Podobno sliko dobimo, če se lahko premikamo le za eno po diagonali in za eno na levo:

7	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	A
6	∅	∅	∅	∅	∅	∅	B	A
5	∅	∅	∅	∅	∅	A	B	A
4	∅	∅	∅	∅	B	A	B	A
3	∅	∅	∅	A	B	A	B	A
2	∅	∅	B	A	B	A	B	A
1	∅	A	B	A	B	A	B	A
0	☼	A	B	A	B	A	B	A
	0	1	2	3	4	5	6	7

Obe igri lahko združimo v eno samo tako, da sta možni potezi na danem polju:

a) premik za eno polje po diagonali proti (0,0) in

b) premik za eno polje v smeri tiste koordinate, ki ima na danem polju večjo številčno vrednost. Na diagonali seveda te poteze ne moremo izvesti, saj imata obe koordinati enako številčno vrednost. Pod diagonalo se lahko premaknemo proti levi, nad diagonalo pa se lahko premaknemo navzdol. Ker pa je naš namen doseči, da bi imel črni več možnosti za zmago, moramo še zmanjšati število polj za 1 (tako da so robna polja polja B, ne A). Ko storimo vse opisane korake, dobimo igro na polju 7x7, ki ima takole razporeditev A in B polj:

6	B	B	B	B	B	B	B
5	A	A	A	A	A	A	B
4	B	B	B	B	B	A	B
3	A	A	A	A	B	A	B
2	B	B	B	A	B	A	B
1	A	A	B	A	B	A	B
0	☼	A	B	A	B	A	B
	0	1	2	3	4	5	6

Na tej plošči ima beli 21, črni pa 27 možnosti od 49. Ena možnost pa je še vedno za remi.

Drago Bokal

ONTOLOGIJA LEŚNIEWSKEGA

Ontologijo lahko glede na njen predmet obravnave označimo za najbolj splošno teorijo o tem, kar je. Začeti moramo tako, da pojasnimo, kaj je *ime* (samostalnik) v ontologiji. Tu je ime bolj splošen pojem kot v drugih formalizacijah logike. V predikatnem računu *individualna konstanta* (ime) označuje natanko en objekt. Semantično vlogo imen v ontologiji bomo pojasnili z naslednjo shemo

- imena (imenski izrazi)
  - označevalna (neprazna ali referenčna) imena
    - lastna imena
      - označujejo natanko en objekt
    - obča imena
      - označujejo več kot en objekt
  - nereferenčna (prazna) imena
    - navidezna (fiktivna) imena
      - nimajo reference

Vzemimo, da *pogovorno področje* (univerzum pogovora) sestoji iz dveh objektov, ki ju označimo z a in b. Uvedimo še prazno c ter obče ime d, ki označuje tako a kot b. Vsa druga imena, ki jih uvedemo, so sinonimi teh imen. Univerzalna izjava

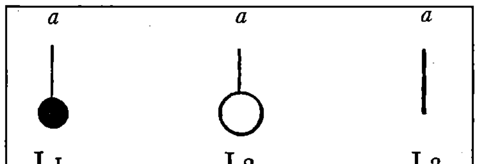
$$[x]\varphi(x)$$

pomeni isto kot

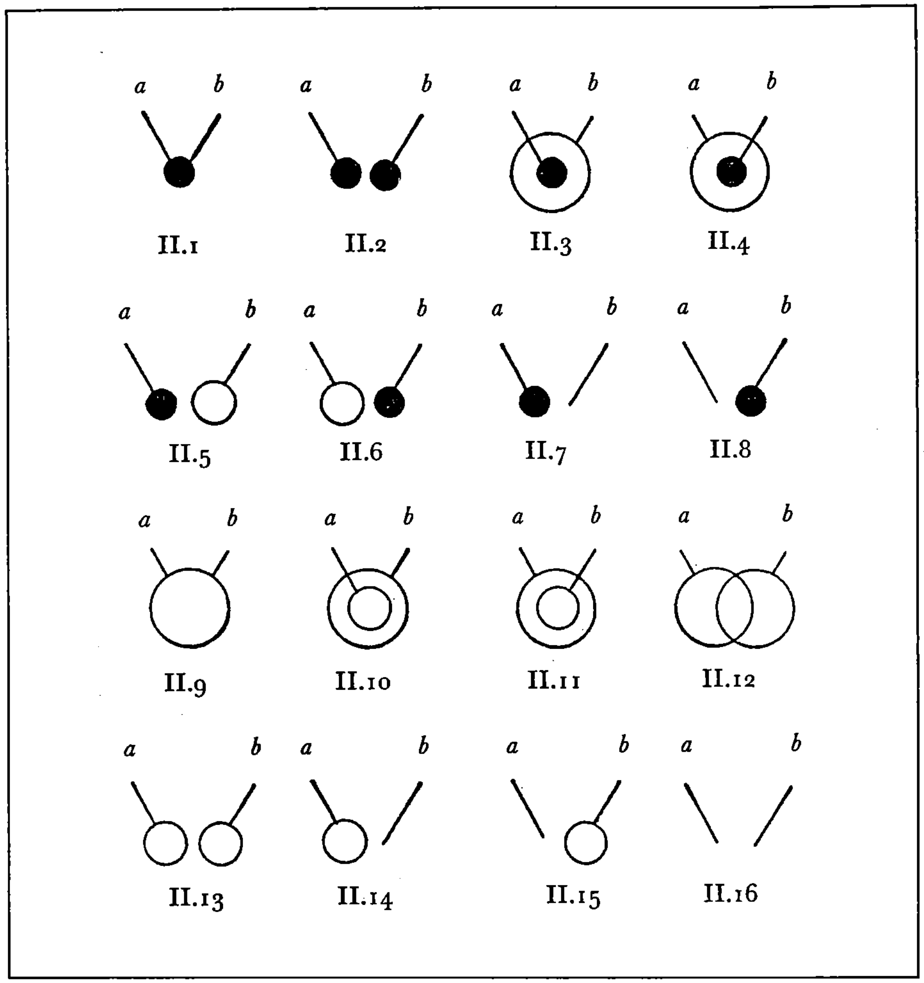
$$\varphi(a) \wedge \varphi(b) \wedge \varphi(c) \wedge \varphi(d).$$

Opomba. Ali se v vsakdanjem življenju srečujemo s fiktivnimi imeni? Kaj pa pri posameznih vedah? Vzemimo npr. matematiko, in naštejmo nekaj imen. Pri tem predpostavimo, da so realna števila pogovorno področje: e (2.7...), 0, 1, naravno število, liho naravno število, 0/0, 1/0, kvadratni koren iz -1. Zadnji dve imeni sta fiktivni, saj (pri zadnjem) nimamo opravka s kompleksnimi števili. Kaj pa 0/0?

Najboljši način za neformalno pojasnitev ontoloških pojmov je vpeljal Lejewski (učenec Leśniewskega). Gre za tako imenovano ontološko tabelo, katere osnova so Eulerjevi krogi. Majhen črn krog predstavlja objekt, ki ga označuje lastno ime. Večji (neosenčeni) krog predstavlja objekte, ki jih označuje obče ime. Fiktivnemu imenu pa ne ustreza noben krog. Diagrami I.1, I.2 in I.3 predstavljajo semantične možnosti enega imenskega izraza, medtem ko digrami od II.1 do II.16 predstavljajo semantične možnosti dveh imen.



I.1 I.2 I.3



V naslednjem spisku bomo navedli primere za posamezne semantične možnosti. Prvo ime predstavlja *a*, drugo *b*.
I.1. Sonce.
I.2. Zvezda.
I.3. Pegaz.
II.1. Sonce, Zemlji najbljižja zvezda.
II.2. Sonce, Zemlja.
II.3. Sonce, zvezda.
II.4. Zvezda, Sonce.
II.5. Zemlja, zvezda.
II.6. Zvezda, Zemlja.
II.7. Zemlja, Pegaz.
II.8. Pegaz, Zemlja.

II.9. Liho število, število, ki ni deljivo z 2.
II.10. Praštevilo, naravno število.
II.11. Naravno število, praštevilo.
II.12. Majhen človek, pameten človek.
II.13. Sodo število, liho število.
II.14. Število, 1/0.
II.15. 1/0, število.
II.16. 1/0, Pegaz.

1. Funktorji vključitve

1.1. *Singularna inkluzija*: $a\varepsilon\ b$ (beremo a je b). Pogoj za resničnost podajata diagrama II.1 in II.3. Resnični so npr. stavki: Sonce ε zvezda. $1\varepsilon\ 1$. 2ε praštevilo. V nadaljevanju bomo zaradi tehničnih razlogov namesto znaka ε uporabljali znak $\in$.
1.2. *Krepka inkluzija*: $a \prec b$ (vsak a je b). Pogoj za resničnost podajajo diagrami II.1, II.3, II.9 in II.10.
1.3. *Šibka vključitev*: $a \subseteq b$ (vsi a so b). Pogoj za resničnost je eden od diagramov II.1, II.3, II.8, II.9, II.10, II.15, II.16.
1.4. *Funktor delne vključitve*: $a\Delta b$ (beremo: kakšen a je b). Pogoj za resničnost je eden od diagramov II.1, II.3, II.4, II.9, II.10, II.11, II.12.

2. Funktorji enakosti

2.1. *Singularna identiteta*: $a = b$ (beremo: a je isti objekt kot b). Diagram II.1 je edina možnost za resničnost.
2.2. *Krepka identiteta*: $a \equiv b$. Pogoj za resničnost je eden od diagramov II.1, II.9.
2.3. *Funktor šibke identitete*: $a \circ b$. Pogoj za resničnost je eden od diagramov II.1, II.9, II.16.

3. Funktorji eksistence

3.1. *Prvi eksistenčni funktor*: $\mathrm{ex}(a)$ (beremo: obstaja vsaj en a). Stavek je resničen, če nastopi ena od možnosti I.1 ali I.2.
3.2. *Drugi funktor eksistence*: $\mathrm{sol}(a)$ (beremo: obstaja največ en a). Stavek je resničen, če nastopi ena od možnosti I.1 ali I.3.
3.3. *Tretji eksistenčni funktor*: $\mathrm{ob(a)}$ (beremo: obstaja natanko en a ali a je objekt). Stavek je resničen samo če nastopa možnost I.1.

Uvedba fiktivnih imen omogoča, da ločimo eksistenco od kvantifikacije. V primeru pogovornega področja z dvema objektoma nam stavek $[\exists x]A(x)$ pomeni $A(a) \vee A(b) \vee A(c) \vee A(d)$.

Če prevedemo izraz "za vsak x, x obstaja" z ontološkim stavkom

$$[x]ob(x),$$

dobimo napačno trditev. Velja namreč

$$[\exists x]\neg ob(x),$$

saj za x lahko vzamemo fiktivno ime. Zato temu kvantifikatorju ne rečemo eksistencionalnostni temveč partikularni in beremo: *za neki x* ali *za neki smisel izraza x*.

Aksiomatizacija ontologije

Pravila ontologije predpostavljajo neki sistem prototetike, to je razširjenega izjavnega računa. Tu bo dovolj, če predpostavimo, da imamo na voljo vse običajne izjavne povezave in pravilo definicije izjavnih funktorjev. Poleg tega potrebujemo še aksiom za osnovni ontološki funktor, pravilo uvedbe ontološke (nominalne) definicije ter pravilo nominalne ekstenzionalnosti.
Nominalna definicija ima obliko

$$[a\ldots](a \in \Psi \leftrightarrow a \in a \wedge \varphi(a)),$$

Tu je Ψ nominalna (imenska) konstanta ali imenski funktor, ki ima za argumente spremenljivke, ki smo jih zaznamovali s tremi pikami. Te spremenljivke morajo skupaj z a nastopati prosto v izjavnem izrazu $\varphi(a)$. Ta shema je bila uporabljena v prvi aksiomatizaciji. Pozne je bila dovoljena shema, v kateri je namesto izraza $a \in a$ nastopil izraz oblike $a \in A$, kjer je A nominalen izraz, v katerem lahko prosto nastopajo samo spremenljivke iz seznama ...
Prvi aksiom ontologije (iz leta 1920) je bila naslednja trditev

$$[ab](a \in b \leftrightarrow [\exists c]c \in a \wedge [c](c \in a \to c \in b) \wedge [cd](c \in a \wedge d \in a \to c \in d)).$$

Zdaj pa naštejmo nekaj definicij

d1. $[a](ex(a) \leftrightarrow [\exists b]b \in a)$

d2. $[a](sol(a) \leftrightarrow [bc](b \in a \wedge c \in a \to b \in c))$

d3. $[a](ob(a) \leftrightarrow [\exists b]a \in b)$

d4. $[ab](a = b \leftrightarrow a \in b \wedge b \in a)$.

d5. $[ab](a \circ b \leftrightarrow [c](c \in a \leftrightarrow c \in b))$.

To so bile definicije nekaterih stavčnih funktorjev. Navedimo še nekaj definicij nominalnih funktorjev.

d6. $[a](a \in \Lambda \leftrightarrow a \in a \wedge \neg a \in a)$ (beremo: a je *objekt, ki ne obstaja*)

d7. $[a](a \in V \leftrightarrow a \in a)$ (beremo: a je *objekt* (stvar, predmet))

d8. $[ab](a \in N(b) \leftrightarrow a \in a \wedge \neg a \in b)$ (a je *ne*-b)

d9. $[Aab](A \in a \cup b \leftrightarrow A \in A \wedge (A \in a \vee A \in b))$ (A je a *ali* b)

d10. $[Aab](A \in a \cap b \leftrightarrow A \in a \wedge A \in b)$ (A je a *in* b)

Uporaba

Najprej se vpašajmo, ali je sploh smiselno vpeljati simbolni jezik, ali ni mogoče vse matematične trditve izraziti v vsakdanjem jeziku, ki ga razširimo z določenimi simboli in spremenljivkami. Za običajno delo v matematiki tak pristop popolnoma zadošča. Ko pa moramo natančno formulirati postopke dokazovanja in definiranja, je to mogoče le, če znamo opredeliti pojem stavka vsakdanjega jezika. To pa se slovničarjem še ni posrečilo. Simbolni jezik je običajno dokaj enostaven, res pa je, da nismo navajeni na njegovo uporabo. Podobno je s programskimi jeziki za računalnike.
Drugo vprašanje pa je, kateri simbolni jezik izbrati. Tako imenovani predikatni račun je najenostavnejši, vendar pa predpostavlja, da imajo vsa imena (konstante) za referenco natanko določen objekt. Nima torej na voljo praznih imen in občih imen. Seveda pa takšna imena v matematiki poznamo.
1.V geometriji nam **premica**(A,B) pomeni natanko določeno premico, če sta točki različni. Če pa je A=B, je **premica**(A,B) obče ime za vse premice, ki grejo skozi A. Po naše velja $A \in premica(A,A)$. Točka A je element premice(A,A). Pomen znaka $\in$ je tu drugačen kot v ontologiji. Tu gre za pripadnost množici, če vzamemo, da je premica množica točk.
2. Vzemimo zdaj, da je univerzum našega pogovora množica realnih števil, in da želimo definirati operacijo deljenja. V ontologiji bi to naredili takole

$$[xyz]\left(x \in \frac{y}{z} \leftrightarrow x \in x \wedge y = xz\right).$$

Če so x, y in z števila in z ni nič, je to povsem običajno deljenje. Kaj pa če je z enako 0? Tedaj nastopita dve možnosti
a) y=0. Tokrat je 0/0 obče ime za poljubno število, saj je pogoj 0=x0 izpolnjen za vsako število x.
b) y ni 0. Recimo, da je y=1. Potem je 1/0 fiktivno ime, saj pogoj 1=x0 ni izponjen za noben x.
3. Kaj pa je z izrazom

$$\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}}?$$

Kdaj je 1/0=x(1/0)? Problem je v tem, da nismo povedali, kako množimo število z neobstoječim objektom. Takšen izraz je prav tako fiktivno ime. Ali ni v tem primeru leva

stran enakosti enaka desni in to pri vsakem x. Ne, saj enakost pomeni, da je objekt na levi isti kot na desni. Fiktivno ime pa ne pomeni objekta (to je števila). Torej je tudi zgornji izraz fiktivno ime.
4. Kaj pa

$$\frac{0/0}{0/0}?$$

Kdaj je 0/0=x0/0? Tudi tokrat enakost ni izpolnjena nikoli, zato je zgornje ime fiktivno.
5. Ali je rešitev iz točke 4 edina. Kaj pa, če bi spremenili definicijo deljenja, tako da bi vzeli kakšno drugo enakost? Do sedaj namreč uporabljali funktor singularne identitete (=). Naslednji kandidat je funktor šibke identitete ($\circ$). Ob primerni opredelitvi seštevanja in množenja, bi lahko pisali:

$$sodo + liho \circ liho,$$
$$sodo \times liho \circ sodo.$$

6. V prejšnji številki revije smo "dokazali", da je 0=1:

Vsako funkcijo F(x), ki je njen odvod enak f(x) imenujemo *nedoločeni integral* funkcije f(x). Dejstvo, da je F(x) nedoločeni integral funkcije f(x), zapišemo takole

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Če je funkcija F(x) integral funkcije f(x), je integral iste funkcije tudi F(x) + C. Torej velja:

$$F(x) + 1 = \int f(x)dx.$$

Toda, če sta dve reči enaki tretji, sta enaki tudi med sabo. Sledi:

$$F(x) = F(x) + 1 .$$

Če odštejemo F(x) na obeh straneh, dobimo 0=1.

Ta dokaz je povsem veljaven, če smo za definicijo privzeli:

$$F(x) = \int f(x)dx \leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Nobenega protislovja ne bi bilo, če bi se definicija glasila:

$$F \in \int f(x)dx \leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Zgornje sklepanje bi bilo po shemi: Sokrat **je** človek. Platon **je** človek. Torej je Sokrat=Platon. Takšno sklepanje je napačno, medtem, ko je sklepanje, x=a in y=a, torej je x=y, povsem veljavno.

7. Uporaba navideznih (praznih) imen, lastnih in občih imen v logiki je bila znana že tisočletje. Novost, ki jo je uvedel Leśniewski, je bila njihova uvedba v formalno oz. simbolno logiko. Danes na tem področju prevladuje predikatni račun, ki ga je opisal nemški logik Gottlob Frege (1848-1925) v delu Begriffsschrift (Pojmovni zapis) (1879), saj je njegov opis bolj enostaven in ima v principu enake izrazne možnosti. Vendar pa ta sistem ne odraža zgradbe naravnih jezikov. Tu lahko iščemo razloge, da se simbolna logika celo v matematiki bolj malo uporablja.
Češki matematik in logik Bernard Bolzano (1781-1848) je bil najpomembnejši logik svojega časa. Prvi je definiral pojem zvezne funkcije, bil je predhodnik teorije množic, definiral je pojem logičnega izhajanja. V delu Wissenschaftslehre (Teorija znanosti) 1837, med drugim piše:

... Na primer, množica točk, ki ležijo med dvema točkama *A* in *B*, je nedvomno neskončna, vendar je popolnoma določena s tema točkama, tako da je natančno določeno, kaj tej množici pripada in kaj ne. Ne obstaja točka, katere status je nedoločen. Morebiti ne bi bilo nič od rečenega prezrto, če ne bi prezrli dejstvo, da je *neskončno* splošen (obči) pojem in da smo privzeli navado, da predstavimo vse neskončne množice in količine z enim in istim znakom, namreč ∞. Ker pa obstajajo različne neskončne množice, s tem, da množici pripišemo lastnost neskončnosti, še nismo izčrpali vseh njenih lastnosti. Kljub vsemu, moramo vse neskončne množice predstaviti z istim znakom. Vsakdo lahko in mora sprejeti naslednje enačbe: $\infty+1=\infty$, $2\infty=\infty$, $\infty/2=\infty$. Na osnovi tega so zaključevali, da je neskončnost nedoločljiva. Nekako pa ni bilo spoznano, da veljajo podobne enakosti, kjer *F* pomeni, da je množica končna: $F+1=F$, $2F=F$, $F/2=F$.

Bolzano še ni dokazal, da obstajajo neskončne množice, med katerimi ne moremo najti bijektivne preslikave. To je nekaj desetletij pozneje odkril Cantor. Seveda pa ni nič narobe, če označimo vse neskončne množice z istim znakom. Zgornje enakosti moramo tolmačiti tako, da so simboli $\infty, \infty+1, \infty/2$ obča imena, ki pomenijo isto kot *neskončna množica*. Simbol $\infty+1$ pomeni množico, ki smo jo dobili iz neskončne množice, tako da smo dodali še en element.
Naloga: Imamo več oznak (imen) za pojem neskončne množice. Če bi želeli napisati Bolzanove enakosti v ontologiji, ne bi smeli uporabiti znaka za individualno identiteto =, ampak znak za krepko ali šibko identiteto. Ali je enakost $F+1{\circ}F$ točna? Ne, saj desna stran vključuje tudi prazno množico, leva pa ne. Mišljeno trditev bi morali zapisati s funktorjem vključitve. Kako?

Izidor Hafner