Metoda semantničnih dreves za reševanje logičnih nalog

Uvod.

V tem sestavku bomo opisali metodo semantičnih dreves, s katero je mogoče reševati določene vrste logičnih nalog. Sam postopek ni povsem nov, podoben način razmišljanja najdemo tudi pri reševanju nalog, ki zahtevajo analizo primerov; zelo pogosto pa se s tem srečujemo pri programiranju. Pri vseh teh nalogah se pogosto zgodi, da prezremo kakšen primer - predvsem zato, ker se nalog lotevamo nesistematično.

Metoda semantičnih dreves nam bo omogočila reševanje naslednjih nalog:

Da je neka formula A izjavnega računa *tavtologija* (*izjava je tavtologija, če je resnična pri vsakem naboru enostavnih izjav, ki jo sestavljajo*), pokažemo tako, da dokažemo, da je formula $\neg A$ protislovje.

Če moramo dokazati, da iz izjav $A_1, \ldots, A_n$ logično sledi izjava B, to naredimo tako, da dokažemo, da je množica $\{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$ protislovna.

Metoda nam daje tudi postopek, kako dani formuli poiščemo ekvivalentno formulo v disjunktivni normalni obliki.

Prav tako lahko rešujemo naloge, pri katerih iščemo sestavljeno izjavo X, ki izpolnjuje določene pogoje. Z metodo semantičnih dreves lahko preverimo tudi pravilnost rešitve. S tem sestavkom deloma tudi odgovarjamo na vprašanje o koristnosti logike pri pouku matematike.

1. Začnimo z nekaj primeri iz matematične prakse

Rešiti enačbo $ax^2+bx+c=0$ s splošnimi koeficienti ne pomeni nič drugega, kot napisati program za takšno reševanje. Najprej moramo razlikovati $a=0$ in $a\neq 0$, nato $b^2-4ac\geq 0$, $b^2-4ac<0$, če je $a\neq 0$. Možne primere zapišemo takole:

$$\begin{array}{c|c|c}
a=0 & \multicolumn{2}{c}{a\neq 0} \\
 & b^2-4ac\geq 0 & b^2-4ac<0
\end{array}$$

Pri reševanju sistema enačb

$$\begin{aligned} ax+by+2z &= 1 \\ ax+(2b-1)y+3z &= 1 \\ ax+by+(b+3)z &= 2b-1 \end{aligned}$$

najprej poiščemo determinanto sistema. Ta je $D=a(b-1)(b+1)$. Nato rešujemo sistem glede na to, ali je $D=0$ ali $D\neq 0$. Vsi možni primeri so:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\multicolumn{5}{c|}{D=0} & D\neq 0 \\
\multicolumn{3}{c|}{a=0} & b=1 & b=-1 & a\neq 0 \\
b=1 & \multicolumn{2}{c|}{b\neq 1} & a\neq 0 & a\neq 0 & b\neq 1 \\
 & b=-1 & b\neq -1 & & & b\neq -1
\end{array}$$

Bolj splošno: Če je $D\equiv A\vee B\vee C$, potem imamo naslednje neprekrivajoče se možnosti, da razbijemo $D\vee\neg D$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
\multicolumn{6}{c|}{D} & \neg D \\
\multicolumn{4}{c|}{A} & B & C & \neg A \\
\multicolumn{2}{c|}{B} & \multicolumn{2}{c|}{\neg B} & \neg A & \neg A & \neg B \\
C & \neg C & C & \neg C & & \neg B & \neg C
\end{array}$$

To razbitje ustreza naslednji izjavi

$(A\wedge((B\wedge(C\vee\neg C))\vee(\neg B\wedge(C\vee\neg C))))\vee(B\wedge\neg A)\vee(C\wedge\neg A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)$

Dokaz trditve $A\setminus B\subseteq(A\setminus C)\cup(C\setminus B)$ lahko sistematično predstavimo takole:

$$\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{x\in A\setminus B} \\
\multicolumn{2}{c}{x\in A} \\
\multicolumn{2}{c}{x\notin B} \\
x\in C & x\notin C \\
x\in C\setminus B & x\in A\setminus C \\
x\in(A\setminus C)\cup(C\setminus B) & x\in(A\setminus C)\cup(C\setminus B)
\end{array}$$

Dokaz ima dve veji, glede na to ali je $x\in C$ ali $x\notin C$.

Pri reševanju neenačbe

$$\Big|\,|2x|-4\Big|<8$$

razlikujemo štiri možnosti

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\multicolumn{2}{c|}{x\geq 0} & \multicolumn{2}{c}{x<0} \\
2x-4\geq 0 & & -2x-4\geq 0 & \\
\text{oz. } x\geq 2 & x<2 & \text{oz. } x\leq -2 & x>-2
\end{array}$$

Lahko si zamislimo, da bo treba analizirati več različnih možnosti, če imamo več parametrov ali enostavnih izjav ali absolutnih vrednosti.

Zdaj pa poskusimo postopek uporabiti v izjavnem računu. Takšnim konstrukcijam bomo v izjavnem računu rekli *semantična drevesa*. V tuji literaturi se uporablja izraz *sematic tableaux*.

2. Kot prvi primer pokažimo, da je naslednja formula izjavnega računa tavtologija:

$$\neg(p\vee q)\Rightarrow(\neg p\wedge\neg q)$$

Konstrukcijo semantičnega drevesa začnemo z negacijo dane formule, za katero pa moramo seveda dokazati, da je protislovna.

$$\begin{array}{lcll}
\multicolumn{3}{l}{(1)\ \neg(\neg(p\vee q)\Rightarrow(\neg p\wedge\neg q))} & \\
\multicolumn{3}{l}{\quad (2)\ \neg(p\vee q)} & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{sledi iz (1)}} \\
\multicolumn{3}{l}{\quad (3)\ \neg(\neg p\wedge\neg q)} & \\
\multicolumn{3}{l}{\quad (4)\ \neg p} & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{sledi iz (2)}} \\
\multicolumn{3}{l}{\quad (5)\ \neg q} & \\
(6)\ \neg\neg p & \vert & (7)\ \neg\neg q & \text{sledi iz (3)} \\
(8)\quad p & \vert & (9)\quad q & \text{sledi iz (6) oz. (7)} \\
\times & \vert & \times &
\end{array}$$

Konstrukcijo drevesa moramo razumeti takole: želimo izvedeti, kdaj je izjava (1) resnična. To bo natanko tedaj, kadar bosta izjavi (2) in (3) resnični. Izjava (2) bo resnična, kadar bosta izjavi (4) in (5) resnični. Za resničnost izjave (3) pa imamo dve možnosti – (6) oz. (7), ali, kar je enako – (8) oz. (9). Toda veja, ki se zaključuje z (8), vsebuje protislovje, to je, zahtevo po resničnosti izjav p in $\neg p$. Enako velja za vejo, ki se konča z (9). Ker ni nobene možnosti, da bi bila izjava (1) resnična, je prvotna izjava tavtologija.

3. Pravila, ki jih uporabljamo pri konstrukciji semantičnega drevesa, podajajo resničnostne vrednosti sestavljene izjave z resničnostnimi vrednostmi posameznih delov:

1. $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

2.1 $\dfrac{A\wedge B}{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}$ 2.2 $\dfrac{\neg(A\wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$

3.1 $\dfrac{A\vee B}{A \mid B}$ 3.2 $\dfrac{\neg(A\vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\ \neg B\end{array}}$

4.1 $\dfrac{A\Rightarrow B}{\neg A \mid B}$ 4.2 $\dfrac{\neg(A\Rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\ \neg B\end{array}}$

5.1 $\dfrac{A\iff B}{\begin{array}{c|c}A & \neg A\\ B & \neg B\end{array}}$ 5.2 $\dfrac{\neg(A\iff B)}{\begin{array}{c|c}A & \neg A\\ \neg B & B\end{array}}$

Prva kolona daje pogoje za resničnost sestavljene izjave, druga pa za neresničnost. Tako pravilo 3.2 pravi, da je izjava $A\vee B$ neresnična (oz. $\neg(A\vee B)$ resnična) natanko tedaj, kadar sta neresnični obe izjavi A in B (oz. resnični obe izjavi $\neg A$ in $\neg B$).

Pravilo 4.2 pravi, da je izjava $A\Rightarrow B$ neresnična, če je A resnična, B pa neresnična

izjava.

Pravilo 5.1 pa pravi, da imamo za resničnost izjave $A\iff B$ obe možnosti: da sta resnični izjavi A in B ali pa, da sta obe neresnični.

Pravili 2 in 3 lahko posplošimo na več spremenljivk, npr.:

2.1' $\dfrac{A_1\wedge A_2\ldots\wedge A_n}{\begin{array}{c}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_n\end{array}}$ 3.1' $\dfrac{A_1\vee A_2\ldots\vee A_n}{A_1 \mid A_2 \mid \ldots \mid A_n}$

2.2' $\dfrac{\neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n)}{\neg A_1 \mid \neg A_2 \mid \neg A_3 \mid \ldots \mid \neg A_n}$ 3.2' $\dfrac{\neg(A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_n)}{\begin{array}{c}\neg A_1\\ \neg A_2\\ \vdots\\ \neg A_n\end{array}}$

Pravila 1 ($\neg\neg A\iff A$) običajno eksplicitno ne navajamo.

Semantično drevo za dano množico izjav zgradimo tako, da najprej zapišemo izjave iz dane množice eno pod drugo. Nato drevo na vsakem koraku razširjamo tako, da

A (*a*) označimo s križcem (×) tiste veje, ki vsebujejo protislovne zahteve, to je, da se v njih pojavlja neka izjava in njena negacija. Takšnim vejam pravimo, da so *zaključene*, *mrtve* ali *zaprte*;
(*b*) odkljukamo tiste točke, v katerih nastopajo le enostavne izjave ali njihove negacije;
(*c*) končamo, če so vse veje zaključene.

B (*a*) poiščemo vejo, ki ni označena za mrtvo in vsebuje neodkljukano točko;
(*b*) izberemo izjavo v neodkljukani točki;
(*c*) razširimo vse žive veje, ki vsebujejo to točko in to točko odkljukamo;
(*d*) končamo, če ni nobene žive veje z neodkljukano točko.

Ko končamo, se lahko zgodi, da so vse veje mrtve. Govorimo o *zaprtem drevesu*. Tu je prvotna množica izjav protislovna. Ali pa imamo na koncu vsaj eno živo vejo. Ta vsebuje nekaj osnovnih izjav in negacije nekaterih osnovnih izjav. Nabor resničnostnih vrednosti, ki naredi te izjave resnične, naredi resnično tudi prvotno množico izjav.

Druga možnost, da pridemo do semantičnega drevesa, pa je, da pri točki $B(c)$ ne razširimo vseh vej, ampak samo nekatere. Tedaj seveda pogoja, s katerim smo razširili drevo, ne smemo odkljukati. To lahko naredimo šele takrat, ko smo ga upoštevali na vseh vejah.

Včasih začetnih izjav (zaradi dolžine drevesa) ne bomo eksplicitno omenjali. Takrat bomo govorili o *reduciranem drevesu*. *Popolnoma reducirano drevo* pa bo vsebovalo le enostavne izjave ali njihove negacije.

4. Naslednji primer nam bo pokazal, kako lahko za dano izjavno formulo dobimo ekvivalentno formulo v normalni disjunktivni obliki. Konstrukcijo začnemo z dano formulo

$$\begin{array}{c}(A\Rightarrow\neg B)\wedge(A\Leftrightarrow\neg C)\wedge(B\vee C)\\ A\Rightarrow\neg B\\ A\Leftrightarrow\neg C\\ B\vee C\\ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} A\\ \neg C\\ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c}\neg A\\ \times\end{array} & \begin{array}{c}\neg B\\ \begin{array}{c|c} B & C\\ \times & \times\end{array}\end{array}\end{array}\end{array} & \begin{array}{c} \neg A\\ C\\ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c}\neg A\\ \begin{array}{c|c} B & C\\ & \end{array}\end{array} & \begin{array}{c}\neg B\\ \begin{array}{c|c} B & C\\ \times & \end{array}\end{array}\end{array}\end{array}\end{array}\end{array}$$

Odkrižane veje vsebujejo protislovje. Naredimo konjunkcije enostavnih izjav oz. njihovih negacij po posameznih neodkrižanih vejah. Vsako enostavno izjavo upoštevamo le enkrat, tudi če nastopa večkrat. Dobimo:

$$(\neg A\wedge C\wedge B)\vee(\neg A\wedge C)\vee(\neg A\wedge C\wedge\neg B)$$

To pa je ekvivalentno: $\neg A\wedge C$

Poiščimo še disjunktivno normalno formo za formulo $A\Leftrightarrow(B\Leftrightarrow C)$

$$\begin{array}{c}A\Leftrightarrow(B\Leftrightarrow C)\\ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} A\\ B\Leftrightarrow C\\ \begin{array}{c|c} B & \neg B\\ C & \neg C\end{array}\end{array} & \begin{array}{c} \neg A\\ \neg(B\Leftrightarrow C)\\ \begin{array}{c|c} \neg B & B\\ C & \neg C\end{array}\end{array}\end{array}\end{array}$$

Ustrezna formula je:

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C)$$

5. Treba je konstruirati preklopno vezje za kontrolo dvigala. Zaradi enostavnosti vzemimo, da imamo le pritličje in eno nadstropje in da se omejimo na gibanje navzdol. Pogoja sta naslednja

(1) Zunanja vrata v pritličju in prvem nadstropju so zaprta (D_1, D_2), dvigalo je prvem nadstropju (S).

(2a) Oseba je v dvigalu (F), notranja vrata so zaprta (D) in oseba vključi dvigalo (B_d) ali

(2b) Osebe ni v dvigalu in dvigalo je poklicano iz pritličja (B_c).

Pogoje lahko zberemo v naslednje drevo:

$$\begin{array}{c}S\\ D_1\\ D_2\\ \begin{array}{c|c} F & \neg F\\ D & B_c\\ B_d & \end{array}\end{array}$$

Ustrezna funkcija je $S\wedge D_1\wedge D_2\wedge((F\wedge D\wedge B_d)\vee(\neg F\wedge D_c))$

6. V naslednjih točkah bomo rešili še nekaj logičnih nalog. Prva je tale:

V neki deželi živijo ljudje dveh vrst: eni vedno govorijo resnico, drugi vedno lažejo. Oboji pa na vprašanja odgovarjajo le z "*da*" oz. "*ne*". Popotnik pride do križpotja, kjer ena pot pelje v mesto, druga pa ne. Nobenega znaka ni, po katerem naj bi se popotnik ravnal, pač pa tam stoji eden od deželanov. Ali popotnik lahko z enim vprašanjem dobi dovolj informacije o tem, po kateri poti naj gre?

Označimo z R izjavo, da omenjeni deželan vedno govori resnico, in z A izjavo, da pelje v mesto desna pot. Recimo, da popotnik postavi vprašanje ali velja X. Odgovor "*da*" pomeni isto, kot da je deželan izjavil X. Odgovor "*ne*" pa, da je deželan izjavil $\neg X$. Ali lahko izberemo X tako, da bo lahko popotnik na osnovi odgovora "*da*" sklepal, da desna pot pelje v mesto in na osnovi odgovora "*ne*", da desna pot ne pelje v mesto? Če deželan izjavi X, potem velja $R\Leftrightarrow X$. Iščemo torej izjavo X, tako da hkrati velja

iz $R\Leftrightarrow X$ logično sledi A (v mesto pelje desna pot);
iz $R\Leftrightarrow\neg X$ logično sledi $\neg A$.

Obe množici $\{R\Leftrightarrow X,\neg A\}$ in $\{R\Leftrightarrow\neg X,A\}$ morata biti hkrati protislovni. Ustrezni reducirani drevesi sta:

$$\begin{array}{c}\neg A\\ \begin{array}{c|c} R & \neg R\\ X & \neg X\end{array}\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}A\\ \begin{array}{c|c} R & \neg R\\ \neg X & X\end{array}\end{array}$$

Da bi bili drevesi zaprti, mora biti

(1) $X\Rightarrow\neg R\vee A$ (3) $\neg X\Rightarrow\neg R\vee\neg A$
(2) $\neg X\Rightarrow R\vee A$ (4) $X\Rightarrow R\vee\neg A$

Pogoja za $\neg X$ obrnemo

(5) $\neg R\wedge\neg A\Rightarrow X$ (6) $R\wedge A\Rightarrow X$

Pogoja (1) in (4) dasta skupaj $X\Rightarrow(\neg R\vee A)\wedge(R\vee\neg A)$
Pogoja (5) in (6) pa dajeta $(\neg R\wedge\neg A)\vee(R\wedge A)\Rightarrow X$
Skupaj to pomeni

$$(\neg R\wedge\neg A)\vee(R\wedge A)\Rightarrow X\Rightarrow(\neg R\vee A)\wedge(R\vee\neg A)$$

(Tu bomo z $A\Rightarrow B\Rightarrow C$ označevali $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C)$.)

Izjavi na levi in desni sta ekvivalentni, obakrat gre za izjavo $X\equiv R\Leftrightarrow A$. Rešitev preverimo tako, da v drevesi vstavimo $R\Leftrightarrow A$ namesto X. Drevesi morata biti zaprti.

$$\begin{array}{c}
\neg A\\
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} R\\ R\Leftrightarrow A\\ \begin{array}{c|c} R & \neg R\\ A & \neg A\\ \times & \times\end{array}\end{array} &
\begin{array}{c} \neg R\\ \neg(R\Leftrightarrow A)\\ \begin{array}{c|c} \neg R & \\ A & \neg A\\ \times & \times\end{array}\end{array}
\end{array}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
A\\
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} R\\ \neg(R\Leftrightarrow A)\\ \begin{array}{c|c} \neg R & R\\ A & \neg A\\ \times & \times\end{array}\end{array} &
\begin{array}{c} \neg R\\ R\Leftrightarrow A\\ \begin{array}{c|c} R & \neg R\\ A & \neg A\\ \times & \times\end{array}\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

7. Recimo, da imamo na neki veji semantičnega drevesa izjavi A in $A \Rightarrow B$. Ali lahko dodamo k tej veji izjavo B? To pomeni – ali lahko znotraj veje uporabimo pravilo modus ponens?

Drevo izgleda takole:

$$\begin{array}{c} A\Rightarrow B\\ \vdots\\ A\\ \begin{array}{c|c} \neg A & B\end{array}\end{array}$$

Če drevo nadaljujemo s formulo $A \Rightarrow B$, potem se levo nadaljevanje zaključi. Ostane samo veja, v kateri smo uporabili pravilo sklepanja. Podobno velja tudi za druga pravila:

Pravilo — Drevo

$$\frac{A \quad A\Leftrightarrow B}{B}
\qquad\qquad
\begin{array}{c} A\Leftrightarrow B\\ A\\ \begin{array}{c|c} A & \neg A\\ B & \neg B\\ & \times\end{array}\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}A\vee B\\ \neg B\end{array}}{A}
\qquad\qquad
\begin{array}{c} A\vee B\\ \neg B\\ \begin{array}{c|c} A & B\\ & \times\end{array}\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}A\Rightarrow B\\ \neg B\end{array}}{\neg A}
\qquad\qquad
\begin{array}{c} A\Rightarrow B\\ \neg B\\ \begin{array}{c|c} \neg A & B\\ & \times\end{array}\end{array}$$

Recimo, da neka veja vsebuje izjavo $\neg A$ in da razširjamo konstrukcijo drevesa s formulo $A \Rightarrow B$. Ta pogoj je na veji, ki vsebuje $\neg A$, avtomatično izpolnjen.

$$\begin{array}{c} A\Rightarrow B\\ \neg A\\ \begin{array}{c|c} \neg A & B\end{array}\end{array}$$

V levi veji se $\neg A$ ponovi; če je desna veja resnična, je resnična tudi leva, zato desno vejo lahko izpustimo.

8. V deželo resničnikov in neresničnikov je vstopil vohun. Zanj je značilno, da je lažnivec, to pomeni, da včasih laže, včasih pa govori resnico. Policija je priprla sumljivo osebo. Na sodišču je pripirti dal izjavo, na osnovi katere je sodnik logično sklepal, da gre za vohuna.

Kaj je lahko izjavila oseba, če je njena izjava resnična? In kaj je lahko izjavila, če je njena izjava neresnična?

Zaznamujmo z R izjavo, da je priprta oseba resničnik. Označimo z L izjavo, da je ta oseba neresničnik. Potem $\neg R \wedge \neg L$ pomeni, da je pripirti vohun. Recimo, da je oseba izjavila X. Sodnik je imel naslednje podatke

$$R \Rightarrow X,\ L \Rightarrow \neg X,\ R \Rightarrow \neg L,\ L \Rightarrow \neg R$$

Na osnovi tega je sklepal, da velja $\neg R \wedge \neg L$.

Zgradimo semantično drevo za zgornje izjave in negacijo zadnje izjave:

$$\begin{array}{c|c} R & L\\ \neg L & \neg R\\ X & \neg X\end{array}$$

Pogoja za zaprtje drevesa sta

$X \Rightarrow L \vee \neg R$

$\neg X \Rightarrow \neg L \vee R$ ali, kar je enako: $L \wedge \neg R \Rightarrow X$.

Skupaj je pogoj za X tale: $L \wedge \neg R \Rightarrow X \Rightarrow L \vee \neg R$

Rešitve so: $L \wedge \neg R$, L, $\neg R$, $L \vee \neg R$.

Prvi dve sta neresnični, drugi dve pa resnični izjavi. Preverimo:

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} R\\ \neg L\\ L\wedge\neg R\\ L\\ \neg R\\ \times\end{array} &
\begin{array}{c} L\\ \neg R\\ \neg(L\wedge\neg R)\\ \\ \begin{array}{c|c} \neg L & R\\ \times & \times\end{array}\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c} R & L\\ \neg L & \neg R\\ L & \neg L\\ \times & \times\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c} R & L\\ \neg L & \neg R\\ \neg R & R\\ \times & \times\end{array}$$

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c}
R \\ \neg L \\ L \vee \neg R \\
\begin{array}{c|c} L & \neg R \\ \times & \times \end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
L \\ \neg R \\ \neg(L \vee \neg R) \\ \neg L \\ R \\ \times
\end{array}
\end{array}
$$

9. Zdaj pa se lotimo naslednje uganke: imamo tri ljudi – eden vedno govori resnico, drugi vedno neresnico, tretji pa včasih eno, včasih drugo. Ali lahko z enim vprašanjem, postavljenim eni izmed oseb, najdemo človeka, ki je bodisi resničnik (vedno govori resnico) ali pa neresničnik (vedno govori neresnico).

Pri prevedbi tega problema v logično simboliko moramo uporabiti čim manjše število osnovnih izjav. Spomnimo se na resničnostne tabele. Tam vsaka nova enostavna izjava podvoji tabelo. Pri semantičnih drevesih je velikost odvisna od števila izjavnih povezav, uporabljenih pri formuliranju problema, vendar je to v zvezi s številom enostavnih izjav. Pri naši nalogi shajamo s štirimi enostavnimi izjavami, kot je razvidno iz tabele.

	resničnik	neresničnik	lažnivec
prva oseba	A	B	$\neg A \wedge \neg B$
druga oseba	C	D	$\neg C \wedge \neg D$
tretja oseba	$\neg A \wedge \neg C$	$\neg B \wedge \neg D$	$(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

Primer: Tretja oseba je resničnik natanko tedaj, kadar ni resničnik ne prva, ne druga oseba. Ostale pogoje lahko strnemo v izjave:

(1) $A \vee B \vee C \vee D$	(1') $(\neg C \wedge \neg D) \Rightarrow (A \vee B)$	(1") $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow C \vee D$
(2) $A \Rightarrow \neg B$	(2') $B \Rightarrow \neg A$	
(3) $A \Rightarrow \neg C$	(3') $C \Rightarrow \neg A$	
(4) $B \Rightarrow \neg D$	(4') $D \Rightarrow \neg B$	
(5) $C \Rightarrow \neg D$	(5') $D \Rightarrow \neg C$	

Seveda velja $(k) \Leftrightarrow (k')$.
Ali lahko z enim vprašanjem "*Ali velja X?*", postavljenem prvi osebi, dosežemo:
- če je odgovor na X "*da*", potem druga oseba ni lažnivec;
- če je odgovor na X "*ne*", potem logično sledi, da tretja oseba ni lažnivec?

Naslednji dve množici izjav morata biti protislovni
(a) (1) – (5), $A \Rightarrow X$, $B \Rightarrow \neg X$, $\neg C \wedge \neg D$
(b) (1) – (5), $A \Rightarrow \neg X$, $B \Rightarrow X$, $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

Zgradimo drevesi za (a) in (b)

$$
\begin{array}{c}
\neg C \\ \neg D \\ A \vee B \\
\begin{array}{c|c} A & B \\ \neg B & \neg A \\ X & \neg X \end{array}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
A \vee B \\ C \vee D \\
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} A \\ \neg B \\ \begin{array}{c|c} C & D \\ \neg A & \neg C \\ \times & \neg X \end{array} \end{array}
&
\begin{array}{c} B \\ \neg A \\ \begin{array}{c|c} C & D \\ \neg D & \neg D \\ X & \times \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Vaja: Utemelji posamezne korake v konstrukciji drevesa.
Pogoji, da se morajo zapreti vse veje, so:
$X \Rightarrow \neg A \vee B \vee C \vee D$ protislovje v prvi veji prvega drevesa;
$\neg X \Rightarrow A \vee \neg B \vee C \vee D$ protislovje v drugi veji prvega drevesa
(to je: $\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D \Rightarrow X$);
$\neg X \Rightarrow \neg A \vee B \vee C \vee \neg D$ protislovje v prvi veji drugega drevesa
(to je: $A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D \Rightarrow X$);
$X \Rightarrow A \vee \neg B \vee \neg C \vee D$ protislovje v drugi veji drugega drevesa.

Pogoj za X je naslednji. Upoštevamo $(P \Rightarrow X \wedge Q \Rightarrow X) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow X)$ in $(X \Rightarrow P \wedge X \Rightarrow Q) \Rightarrow (X \Rightarrow P \wedge Q)$
$(\neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \Rightarrow X \Rightarrow (\neg A \vee B \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C \vee D)$

Vaja: Preveri, da desna stran implicira levo stran, to je, da je pogoj konsistenten! Pokaži, da obratno ne velja, torej imamo več rešitev.

Preverimo rešitev $X_1 \equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D)$ tako, da vstavimo X_1 v obe drevesi.

$$
\begin{array}{c}
\neg C \\ \neg D \\
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} A \\ \neg B \\ \begin{array}{c|c} \neg A & A \\ B & \neg B \\ \neg C & \neg C \\ \neg D & D \\ \times & \times \end{array} \end{array}
&
\begin{array}{c} B \\ \neg A \\ \neg(\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \\ \neg(A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \\ \begin{array}{c|c|c|c} A & \neg B & C & D \\ \times & \times & \times & \times \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & A & B \\
 & \neg B & \neg A \\
 & D & C \\
 & \neg C & \neg D \\
\neg(\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) & & \neg A \mid A \\
\neg(A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) & & B \mid \neg B \\
\neg A \mid B \mid C \mid \neg D & & \neg C \mid \neg C \\
\times \mid \times \mid \times \mid \times & & \neg D \mid D \\
 & & \times \mid \times
\end{array}
$$

Vaja: Pretvori obe drevesi v dokaz pravilnosti rešitve.

10. Ali je možno v nalogi prejšnjega razdelka postaviti prvi osebi tako vprašanje, da bo v primeru odgovora "*da*" sledilo, da prva oseba ni lažnivec, v primeru odgovora "*ne*" pa, da druga oseba ni lažnivec. Hkrati morata biti protislovni naslednji množici izjav:

$\{\,(1)-(5),\ A \Rightarrow X,\ B \Rightarrow \neg X,\ \neg A \wedge \neg B\}$

$\{\,(1)-(5),\ A \Rightarrow \neg X,\ B \Rightarrow X,\ \neg C \wedge \neg D\}$

Zgradimo drevo za prvo množico:

$$
\begin{array}{c}
\neg A \\
\neg B \\
C \vee D \\
\begin{array}{c|c}
C & D \\
\neg D & \neg C \\
\neg A \mid X & \neg B \mid \neg X
\end{array}
\end{array}
$$

Prve in tretje veje ne moremo zaključiti, saj ne vsebujeta X. Torej vprašanja z iskanimi lastnostmi ni.

IZBIRNE MATEMATIČNE NALOGE

1. Celo število, ki je najbližje vrednosti $\sqrt{\frac{60{,}1}{0{,}99}+3{,}95}$ je
   a) 3 b) 8 c) 9 d) 25 e) 64

2. Če je $A=\frac{0.1}{0.5}$, $B=\frac{0.5}{1}$ in $C=\frac{1}{0.5}$, potem velja
   a) $A\geq B\geq C$ b) $B\geq A\geq C$ c) $C\geq A\geq B$ d) $A\geq C\geq B$ e) $C\geq B\geq A$

3. Med števili 0.5129, 0.9, 0.89 in 0.289 je vsota največjega in najmanjšega števila enaka
   a) 1.189 b) 0.8019 c) 1.428 d) 1.179 e) 1.4129

4. Ko je učenec tipkal na računalnik, je vtipkal $35\,095$ namesto 35.95. Da bi popravil napako, mora sedaj
   a) prišteti 35.95 b) odšteti $35\,059.05$ c) odšteti 35130.95 d) prišteti $35\,130.95$ e) odšteti $35\,095$

5. Katera skupina kotov sestavlja enakokrak trikotnik:
   a) $30,\ 60,\ 90$ b) $91,\ 8,\ 91$ c) $70,\ 70,\ 70$ d) $50,\ 50,\ 60$ e) $54,\ 72,\ 54$

6. Če na začetku palice piše $\frac{1}{8}$, na koncu pa $\frac{7}{12}$, je na sredi palice število
   a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{11}{48}$ e) $\frac{17}{48}$

7. Če kupim 20kg žebljev po $3a$ SIT za kilogram in 10kg žebljev po $6b$ SIT za kilogram, je povprečna cena za kilogram žebljev, v SIT
   a) $a+b$ b) $2a+b$ c) $a+2b$ d) $60a+60b$ e) $2a+2b$

8. Povprečna ocena šestih učencev je bila ob konferenci 84. Vendar je bila ena ocena napačno šteta. Šteli so 86 namesto 68. Pravo povprečje vseh šestih učencev je:
   a) 87 b) 83 c) 82 d) 81 e) 78

9. Izloči število, ki ni celo:
   a) $\frac{836}{2}$ b) $\frac{210}{7}$ c) $\frac{509}{5}$ d) $\frac{350}{25}$ e) $\frac{380}{20}$

10. Poišči razliko med največjim skupnim deliteljem in najmanjšim skupnim večkratnikom števil 5, 10 in 35
    a) 65 b) 1745 c) 35 d) 5 e) 30

11. Če tromestnemu številu $2A4$ prištejemo 329, dobimo $5B3$. Če je $5B3$ deljivo s 3, potem je največja vrednost števke A
    a) 1 b) 4 c) 7 d) 8 e) 9

12. Svetilka pobliskne vsakih 6 minut. Zvonec pa pozvoni vsakih 8 minut. Če svetilka pobliskne hkrati, ko zazvoni zvonec, potem je najmanjše število minut, ko se to ponovi
    a) 14 b) 42 c) 24 d) 72 e) nikoli

13. Število, ki je mnogokratnik števila 15, toda ni mnogokratnik števila 18, je
    a) 180 b) 320 c) 360 d) 420 e) 540