GRAMATIKA SINTAKTIČNIH KATEGORIJ

Avtor teorije semantičnih kategorij je bil poljski logik Stanislaw Leśniewski (1886-1939). Po izobrazbi je bil filozof, tako kot vodilni logik poljske šole logike Jan Łukasiewicz (1878-1956). Bil je znan po svoji izredni domiselnosti in sposobnosti natančnega izražanja. Filozof Kotarbinski zanj pravi, da se ne spominja niti ene same logične razprave, v kateri ne bi imel Leśniewski prav.

V času pred prvo svetovno vojno se je ukvarjal predvsem s filozofijo. Napisal je nekaj člankov, ki so zelo blizu tako imenovani analitični filozofiji med obema vojnama. Kasneje se je odrekel vsem tem člankom. Njegovo pozornost so pritegnile matematične antinomije. Leśniewski se je lotil konstrukcije sistema za logično osnovo matematike, ki naj bi bil brez protislovij in gnoseološko najbolj primeren. Njegov sistem sestoji iz treh formalnih teorij, katerih unija predstavlja možno osnovo za celotno matematiko.

Prototetika je najobsežnejši izjavni račun. *Ontologija* je obsežna logika imen in vključuje Aristotelovo silogistiko, predikatni račun, račun razredov, relacij, teorijo identitete ter celotno prototetiko. *Mereologija* je teorija o relaciji med delom in celoto.

Teorija semantičnih kategorij, v novejšem času se je uveljavil pojem *sintaktične* kategorije, je nastala leta 1922.

Sintaktična kategorija nekega jezika je razred izrazov, ki imajo to lastnost, da je v stavku mogoče zamenjati neki izraz samo z izrazom iste kategorije, če želimo, da bo nov izraz tudi stavek. V jeziku razlikujemo eno ali več *osnovnih* kategorij ter tako imenovane *izvedene* kategorije.

1. zgled. V prototetiki je kategorija stavkov (oznaka *s)* osnovna kategorija, izvedene kategorije pa generiramo po pravilu:

Če so $k, k_1, k_2, \dots, k_n$ „kategorije, potem je $\dfrac{k}{k_1 k_2 \cdots k_n}$ kategorija. To je kategorija *funktorjev*, ki zahtevajo *n* argumentov iz kategorij $k_1, \dots, k_n$, sestavljeni izraz pa bo kategorije k.

Znak za ekvivalenco je kategorije $\dfrac{s}{ss}$, saj iz dveh stavkov tvori nov stavek.

Vprašanje: Katere kategorije je znak za negacijo?

2. zgled. V ontologiji (kot tudi v večini jezikov formalne logike) imamo dve osnovni kategoriji, kategorijo stavkov (s) in kategorijo imen (n). Izvedene kategorije so npr.:

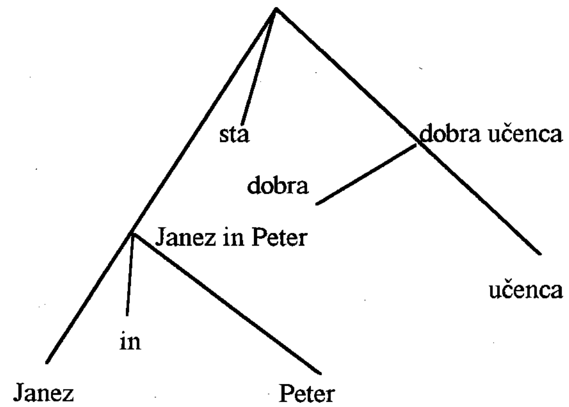
$\dfrac{n}{n}$ je oznaka za kategorijo funktorjev, ki pri argumentu iz kategorije n (imenovalec) da za rezultat iz kategorije n (števec). To so torej imenski funktorji z enim imenskim argumentom.

$\dfrac{s}{nn}$ je oznaka kategorije stavčnih funktorjev z dvema imenskima argumentoma.

V stavku "Sokrat je filozof." sta "Sokrat" in "filozof" iz kategorije imen, besedica "je" je stavčni funktor z dvema imenskima argumentoma. Osnovni simbol ontologije je znak ε, ki v simbolizmu pomeni *je*. Torej bi lahko zapisali: Sokrat ε filozof.

3. zgled. Pri naravnih jezikih dve osnovni kategoriji verjetno ne zadoščata, vendar pa bi lahko analizirali stavek na naslednji način:

Janez in Peter sta dobra učenca.



V tej analizi je beseda "sta" stavčni funktor z dvema imenskima argumentoma, beseda "in" ja imenski funktor z dvema imenskima argumentoma, pridevnik "dobra" je imenski funktor z enim imenskim argumentom.

V svojih teorijah Leśniewski ni uporabljal le funktorjev, ki jim sledi eno zaporedje argumentov, ampak je teh skupin lahko tudi več.

4. Označimo z ρ kategorijo oznak za realna števila. Potem lahko definiramo znak za splošno linearno funkcijo:

$$L[k \quad n](x) = kx + n.$$

Izrazu $L[k \quad n]$ pripada oznaka $\frac{\rho}{\rho}$, znaku L pa oznaka $\frac{\rho}{\frac{\rho}{\rho\rho}}$.

V matematiki prvi skupini argumentov pravimo *parametri*, zadnji skupini pa (neodvisne) *spremenljivke*. Tokrat je neodvisna spremenjivka ena sama. V logiki ponavadi ne razlikujemo parametrov od spremenljivk in uporabljamo samo pojem spremenljivke.

5. zgled. Definirajmo integralski funktor

$$\int[ab](f) = \int_a^b f(x)dx .$$

Znaku $\int$ pripada oznaka (indeks) $\frac{\rho}{\frac{\rho}{\frac{\rho}{\rho\rho}}}$. Izrazu $\int[ab]$ pripada indeks $\frac{\rho}{\frac{\rho}{\rho}}$, spremenljivki f pa indeks $\frac{\rho}{\rho}$.

Tokrat smo znaku f rekli spremenljivka. V logiki razlikujemo spremenljivke od konstant. Konstante imajo natanko določen pomen. Znaki 0, 1, 2, =, +, $\int$ so konstante (različnih sintaktičnih kategorij). Njihov pomen je stalen in to je določen pojem. Spremenljivke imajo podobno vlogo kot konstante, vendar je njihova vloga ta, da zaznamujejo objekte določenega področja. Če želimo, da bo izraz, ki vsebuje spremenljivko, imel natanko določen pomen, mora biti spremenljivka v izrazu *vezana*. En način vezave so kvantifikatorji. Na primer "za vsak x", "obstaja vsaj en f", ... Če x nastopa v področju kvantifikatorja "za vsak x", potem je to nastopanje vezano. Če neko nastopanje ni vezano, potem je *prosto*. Druga možnost vezave spremenljivke so *operatorji*. V definiciji integralskega funktorja, desno od znaka enakosti, je spremenljivka x vezana, saj izraz na desni ni odvisen od spremenljivke x. V matematiki moramo pogosto sami ugotoviti, kako je kakšna spremenljivka vezana. Na primer

$$a + b = b + a$$

ponavadi pomeni, da enakost velja za vsak a in b iz nekega področja.

Za konec podajmo nekaj pogojev, kdaj lahko izraz v obliki enakosti, privzamemo kot pravilno definicijo k neki teoriji. Tem definicijam lahko rečemo tudi *eksplicitne definicije*. O drugih oblikah definicij bomo pisali kdaj drugič.

Izraz oblike

$$Z\{abc...\}[klm...](xyz...) = \Phi(a,b,c,...,k,l,m,...,x,y,z,...)$$

je pravilna definicija znaka Z, samo če so izpolnjeni pogoji:

a) Znak Z je nov znak, torej ga do sedaj še nismo uporabljali.

b) Spremenljivke a, b, c, ..., k, l, m, ..., x, y, z, ..., ki nastopajo na levi strani, morajo nastopati kot proste spremenljivke na desni strani. Vse druge spremenljivke na desni morajo biti vezane.

c) Vse konstante na desni so ali osnovne konstante ali pa že prej definirane. Sintaktične kategorije spremenljivk in konstant na desni morajo biti že na voljo.

Zanimivo je, da izraz f(x) = 1 ni pravilna definicija konstantne funkcije z vrednostjo 1, ker x ne nastopa prosto na desni (saj sploh ne nastopa). Vendar pa bi lahko definirali f(x) = x - x + 1, kar ustreza pogoju b.

Nekaj pravilnih definicij:

$a - b = a + (-b)$, definicija odštevanja, če imamo seštevanje in operacijo nasprotnega števila;

$O(a,r) = \{x; |x - a| < r\}$, spremenljivka je na desni vezana z operatorjem tvorjenja množic;

$\Delta\langle f\rangle[x](h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, diferenčni kvocient funkcije f v točki x, pri spremembi neodvisne spremenljivke za h;

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \Delta\langle f\rangle[x](h)$; znaka, ki ga definiramo, nismo pisali pred argumenti, ampak med argumentoma. To je običajna matematična praksa.

Nekaj nepravilnih definicij:

$o(h) = h(\Delta\langle f\rangle[x](h) - f'(x))$, leva stran ne vsebuje f in x, čeprav je odvisna od teh količin;

$dy = f'(x)\Delta x$, leva stran ne vsebuje prostih spremenljivk z desne strani;

$\Delta x = x_1 - x_0$, proste spremenljivki na desni ne nastopata na levi.

Seveda pa lahko za vsak izraz vpeljemo okrajšavo, vendar pa okrajšava ni definicija, čeprav njena oblika zelo spominja nanjo, kar povzroča dodatne težave.

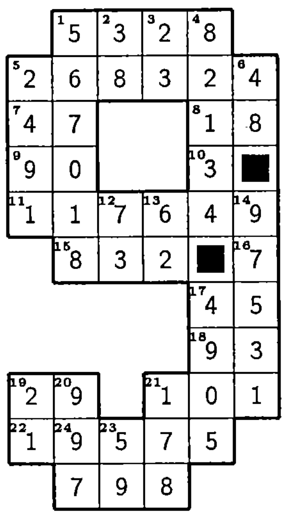
V matematiki pogosto funktor zapisujemo med argumente, včasih ga celo spuščamo. V naslednjih izrazih, določi funktor in argumente (argumenti so lahko tudi konstante):

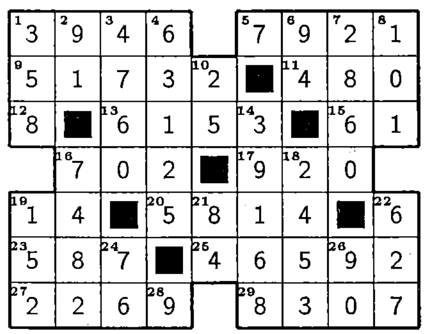
$$a_{10}, x^2, e^x, |x|, \cos x, \cos^2 x, \cos x^2,$$

$$\binom{n}{m}, dx, dy, (f(x))', \int f(x)dx, !x, \{a,b\}, (a,b), a{:}b{:}c, \frac{dy}{dx}.$$

Izidor Hafner

REŠITVI METEMATIČNIH KRIŽANK IZ MATKE

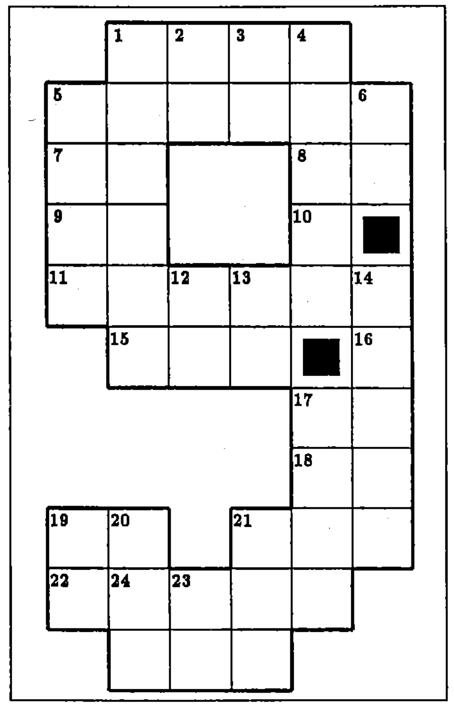




MATEMATIČNI KRIŽANKI IZ MATKE

Iz hrvaškega časopisa za osnovnošolce MATKE smo izbrali nekaj matematičnih križank, ki jih je sestavil Zdravko Kurnik. Objavo je dovolilo uredništvo Matke. Isto velja za povzetek članka o AMIDI.

Vodoravno: **1**. Ploščina pravokotnika, katerega dolžini stranic sta dve zaporedni naravni števili, obseg pa je enak 292. **5**. 168^2+490^2. **7**. $31^3-30^3-14^3$. **8**. D(306, 468, 594). **9**. 45(0.625-0.5)+84.375. **10**. Rešitev enačbe $x-2(x-2)+3(x-3)=1$. **11**. 49^3. **15**. D(9152, 14144). **16**. 'Srečno' število. **17**. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2$. **18**. Hitrost avtomobila v kilometrih na uro, s katero pot 62 km prevozi v 40 min. **19**. Deseto praštevilo po vrsti. **21**. Najmanjše trimestno število. **22**. Prostornina kvadra, katerega robovi imajo dolžine treh zaporednih lihih naravnih števil manjših od 30. **24**. DCCXCVIII.



Navpično: **1**. v(981, 1734, 3706). **2**. Minute, ki jih potrebuje avion s hitrostjo 900 km na uro za pot 570 km. **3**. Praštevilski delitelj števila 2001. **4**. Površina kocke s prostornino 1601613. **5**. MMCDXCI. **6**. Obseg kvadrata, ki ima ploščino 144. **12**. 0.625% od 11680. **13**. LXII. **14**. Največje število, ki ga lahko sestavimo iz različnih lihih števk. **17**. Vsota vseh dvomestnih naravnih števil. **19**. Vrednost izraza $a+b+8ab$ za $a = -2/3$, $b = -5$. **20**. Največje trimestno praštevilo. **21**. $3^2 + 13^2$. **23**. Rešitev enačbe

$$x-\frac{x-2}{3}+\frac{x+1}{15}=44.$$