Sintetična in analitična metoda reševanja logičnih nalog

Sinteza pomeni ustvarjanje sestavljenih objektov iz enostavnejših, ***analiza*** pa razstavljanje sestavljenih na enostavne. Torej sta to dve nasprotni operaciji.

Oglejmo si naslednjo znano logično nalogo. Andrej, Boris in Cene so bili osumljeni nekega kriminalnega dejanja. Na sodišču so dali tele izjave:
Andrej: »Boris je kriv, Cene pa ni.«
Boris: »Če je Andrej kriv, potem je tudi Cene kriv.«
Cene: »Jaz nisem kriv, toda vsaj eden od drugih dveh je kriv.«
Kdo je kriv, če so bile njihove izjave pred sodnikom resnične?

Za atomarne (enostavne) bomo vzeli naslednje izjave, ki jih bomo označili s črkami A, B in C:
A = Andrej je kriv. B = Boris je kriv. C = Cene je kriv. Če uporabimo simbole $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ($\Rightarrow$), $\neg$ za »in«, »ali«, »če, potem« in »ne«, potem lahko izjave osumljenih zapišemo simbolično, tako kot je zapisano v treh desnih stolpcih spodnje tabele. (V logiki povezavam rečemo konjunkcija, disjunkcija, implikacija in negacija. Večkrat pa uporabimo tudi ekvivalenco $\Leftrightarrow$.)
Ker imamo 3 atomarne izjave (vsaka je resnična ali neresnična), imamo 8 različnih naborov resničnostnih vrednosti. Pri vsakem naboru izračunamo vrednosti sestavljenih izjav (vrednosti vpišemo pod ustrezen simbol).

(1)	(2)	(3)	(1)		(2)	(3)		
A	B	C	B ∧	¬C	A → C	¬C	∧ (A	∨ B)
T	T	T	F	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T	T	F	F
			(1)		(2)		(3)	

Vse tri sestavljene izjave so resnične samo v 6 vrstici. Torej Andrej in Cene nista kriva, Boris pa je.
Temu sintetičnemu postopku se v logiki reče izdelava resničnostne tabele.

Zdaj pa začnimo s sestavljenimi izjavami. Kdaj bo resnična Andrejeva izjava. Odgovor: Če sta resnični izjavi B in $\neg$ C. Izjava $A \rightarrow C$ je resnična, če je A neresnična ali je C resnična. Ker C ni resnična, A ni resnična. Cenetova izjava je resnična, kakorhitro je resnična Andrejeva izjava. Naše sklepanje zapišemo v obliki drevesa:

$$B \wedge \neg C$$
$$A \rightarrow C$$
$$\neg C \ \wedge (A \vee B)$$
$$B$$
$$\neg C$$
$$\neg A \quad | \quad C$$
$$\qquad\qquad X$$

Najprej smo napisali predpostavke, to je dane tri izjave. Potem smo analizirali Andrejevo izjavo. Za njeno resničnost morata biti resnični izjavi B in $\neg$C. Za resničnost Borisove izjave pa imamo dve možnosti. Prvotno drevo se razcepi v dve veji: $\neg$A | C. Toda veja, ki gre na C, vsebuje tudi $\neg$C. Taki veji pravimo, da je zaprta ali protislovna in jo označimo z X. Imamo pa eno odprto vejo, iz katere razberemo vrednosti atomarnih izjav. Cenetove izjave sploh nismo analizirali, saj je resnična, če je resnična Andrejeva izjava.

Opisani analitični metodi v logiki pravijo metoda *semantičnih tabel* (dreves).

Ni težko iz semantičnega drevesa prebrati dokaza:
Vzemimo, da so vse tri izjave osumljenih resnične. Zaradi Andrejeve izjave je Boris kriv, Cene pa ni. Borisova izjava je resnična, če Andrej ni kriv ali če je kriv Cene. Toda Cene ni kriv, torej tudi Andrej ni kriv.

Dokaz lahko zapišemo v nekem formalnem sistemu (npr. program Fitch):

1. $B \wedge \neg C$	
2. $A \rightarrow C$	
3. $\neg C \wedge (A \vee B)$	
4. B	$\wedge$ Elim: 1
5. $\neg C$	$\wedge$ Elim: 1
6. A	
7. C	$\rightarrow$ Elim: 6,2
8. $\perp$	$\perp$ Intro: 5,7
9. $\neg A$	$\neg$ Intro: 6-8
10. $\neg A \wedge B \wedge \neg C$	$\wedge$ Intro: 9,5,4

V zgornjem dokazu so koraki oštevilčeni, v spodnjem niso.

$B \wedge \neg C$	
$A \to C$	
$\neg C \wedge (A \vee B)$	
B	$\wedge$ Elim
$\neg C$	$\wedge$ Elim
A	
C	$\to$ Elim
$\perp$	$\perp$ Intro
$\neg A$	$\neg$ Intro
$\neg A \wedge B \wedge \neg C$	$\wedge$ Intro

Dokaz je zaporedje stavkov. Vsak stavek zapišemo v svojo vrstico. Najprej so dane predpostavke (premise), ločene pa so od drugih stavkov z oznako na desni črti. Za vsako nadaljnjo vrstico moramo povedati, po katerem pravilu sklepanja in iz katerih predhodnih vrstic sledi. Fitchov sistem je t.i. sistem naravne dedukcije (prva sta ga uvedla Gentzen in Jaskowski). Pravila sklepanja se delijo na pravila uvedbe (introdukcije) in pravila izločitve (eliminacije). Vsaka logična operacija ima po dve pravili. Vrstici 5 in 6 sta dobljeni z eliminacijo konjunkcije. To je preprosto pravilo, ki ga v vsakdanjem dokazovanju kar preskočimo. Vrstice 6-8 imenujemo poddokaz. Vrstica 6 je dodatna predpostavka (v vsakdanjem jeziku rečemo: pa naj velja še A). C smo dobili z izločitvijo implikacije. To pravilo je v logiki znano kot modus ponens. Toda zdaj smo prišli do tega, da veljata C in ¬C. Temu pravimo protislovje, njegova oznaka pa je ⊥ (obrnjeni T). Če smo iz A izpeljali protislovje, mora veljati ¬A. Temu pravilu se reče reductio ad absurdum. Zdaj vemo za vrednosti vseh enostavnih izjav, velja torej njihova konjunkcija (*stik* po prof. Križaniču).

Opazimo, da je metoda semantičnih dreves precej hitrejša, zato jo kaže kar največkrat uporabljati. Metodo resničnostnih tabel včasih poimenujejo tudi mehanična metoda. Z njo enostavno pregledamo vse možnosti. Seveda nam to lahko porabi veliko časa.

Odgovorimo še na eno vprašanje: Če so vsi trije nedolžni, kdo je lagal. V resničnostni tabeli si ogledamo vrstico z naborom FFF. Lagala sta Andrej in Cene. Tu seveda analitična metoda ni uporabna, saj ne vemo vrednosti sestavljenih izjav. Vendar pa tudi ni potrebno izdelati celotne resničnostne tabele, ampak le eno vrstico.

Za sestavo resničnostnih tabel smo uporabili program Boole. Tu F(false) pomeni neresnico T(truth) pa resnico.

Kako pa bi odgovorili na vprašanje: Če krivi lažejo in nedolžni govorijo resnico, kdo je kriv?

V resničnostni tabeli moramo pregledati vse vrstice in ugotoviti ali je kakšna vrstica, v keteri imajo atomarne izjave nasprotno vrednost od sestavljenih. To je v 3 vrstici. Kriva sta Andrej in Cene.
Kaj pa analitična metoda? Tokrat se iščejo vrednosti atomarnih izjav, za katere so resnične naslednje izjave:
$\neg A \Leftrightarrow B \wedge \neg C$
$\neg B \Leftrightarrow A \rightarrow C$
$\neg C \Leftrightarrow \neg C \wedge (A \vee B)$.
Tokrat je semantično drevo kar obsežno in je takorekoč ekvivalentno pregledovanju vseh možnosti.

Lahko pa pridemo do rešitve s sklepanjem: Recimo, da Andrej ni kriv. Potem je zaradi njegove izjave Boris kriv, Cene pa ne. Ker je Borisova izjava napačna, mora biti Andrej kriv (Cene pa ne). To je protislovje. Andrej je torej kriv. Ker je A resnična izjava (ne A pa napačna) je B neresnična ali C resnična. Ali je lahko B resnična izjava. Potem je A resnična, C pa ne. To pa je protislovje.

Tokrat smo imeli 3 enostavne izjave, zato je v resničnostni tabeli $2^3=8$ vrstic. Če pa bi imeli 8 atomarnih izjav, bi imeli 256 vrstic, ki bi jih le težko izračunali v 30 min, kolikor je na voljo na tekmovanju. Nalogo z 10 atomarnimi izjavami dobimo, če smo na otoku vitezov in oprod in srečamo 5 otočanov, vsak med njimi pa ima lahko cekin. Če ima cekin natanko eden pa lahko število atomarnih izjav zmanjšamo za 1. Če štirje nimajo cekina, ga ima peti. Če ga ima peti, ga nima nobeden od prvih štirih.

Pravila za resničnostne tabele.

(1) A	(2) B	(1) $A \wedge B$	(2) $A \vee B$	(3) $A \rightarrow B$	(4) $A \leftrightarrow B$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T
		(1)	(2)	(3)	(4)

Pravila semantičnih dreves.

$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$A \rightarrow B$	$\neg(A \rightarrow B)$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$
A	$\neg A \mid \neg B$	$A \mid B$	$\neg A$	$\neg A \mid B$	A	$A \mid \neg A$	$A \mid \neg A$
B			$\neg B$		$\neg B$	$B \mid \neg B$	$\neg B \mid B$

Zgornja pravila (razen za ekvivalenco) lahko razdelimo na pravila podaljševanja in pravila razcepa. K tem pravilom moramo dodati še odpravo dvojne negacije: $\neg\neg A \rightarrow A$.
Zdaj lahko podamo algoritem za izgradnjo semantičnega drevesa za dano množico izjav:
1. Zapišemo dane izjave drugo pod drugo.
2. Izberemo eno od še ne izbranih izjav v drevesu in uporabimo ustrezno pravilo na vseh odprtih vejah drevesa pod to izjavo.
3. Veje, na katerih nastopa kakšna izjava in njena negacija, označimo kot zaprte (protislovne).
4. Če imamo še kakšno odprto vejo in vsaj eno še ne izbrano izjavo, se vrnemo na točko 2.
5. Ko nimamo več neizbranih izjav, se lahko zgodi: a) Vse veje so zaprte. Tedaj je prvotna množica izjav protislovna. b) Če pa imamo odprto vejo, potem lahko najdemo takšno prireditev, da bodo vse izjave na veji resnične. Če na veji nastopa enostavna izjava A, dobi vrednost T, če nastopa $\neg A$, pa F.

Ko izbiramo izjavo, dajemo prednost izjavam, ki drevo podaljšujejo. Zakaj se drevo širi, če imamo v izjavah ekvivalenco?

Oglejmo si zdaj nekaj preprostih nalog iz knjige Poznate naslov te knjige?
Na otoku vitezov in oprod vitezi vedno govorijo resnico, oprode pa vedno neresnico. Če torej neki otočan (Andrej) da izjavo X in označimo A = Andrej je vitez, potem vemo, da velja $A \Leftrightarrow X$. To je, če je otočan vitez, je X resnica, če je X resnica, je otočan vitez.

1. Srečamo otočana (recimo jima A in B). A izjavi, da sta on in B oprodi. Kaj lahko sklepamo?
Vemo: $A \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$. Zgradimo drevo.

$A \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
$A \mid \neg A$
$\neg A \wedge \neg B \mid \neg(\neg A \wedge \neg B)$
$\neg A \mid \neg\neg A \vee \neg\neg B$
$\neg B \mid A \vee B$
$X \mid A \mid B$
X

Edina odprta veja vsebuje $\neg A$ (A je oproda) in B (B je vitez).

2. A je dejal: "Če sem jaz vitez, potem je tudi B vitez.".
Tokrat je drevo takole.

$A \Leftrightarrow A \rightarrow B$
$A \mid \neg A$
$A \rightarrow B \mid \neg(A \rightarrow B)$
$\neg A \mid B \mid A$
$X \quad \neg B$
X

Na edini odprti veji imamo A in B (oba sta viteza).

Izidor Hafner