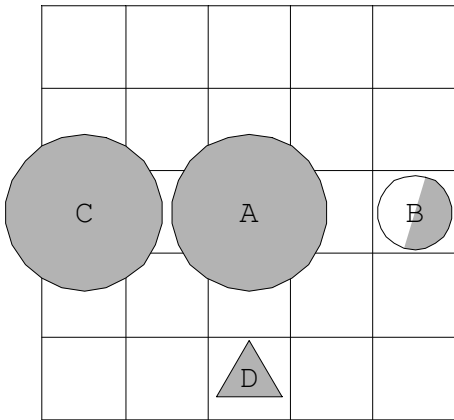


Verjetnostna logika

Slabost trovalentne logike, to je logike, ki ima vrednosti 0, 1/2 in 1, je očitna, če si ogledamo situacijo:



Spomnimo se, da imamo v svetu Tarskega samo trikotnike, kvadrate in petkotnike. Krog pomeni, da oblike ne poznamo ali da ni določena. Zato je vrednost stavka, da je A trikotnik, enaka 1/2. Vrednost stavka, da A ni trikotnik, je prav tako enaka 1/2.

Toda, če A ni trikotnik, potem je kvadrat ali petkotnik. Bolj naravno bi bilo, če bi vzeli, da je vrednost stavka, da je A trikotnik enaka 1/3, vrednost stavka, da A ni trikotnik, pa 2/3, saj je A kvadrat ali petkotnik. To dobimo, če obliko naključno izbiramo med tremi enakimi možnostmi. In tako smo naredili prvi korak v verjetnostno logiko.

Dogovorimo se še, da na pol osenčen lik pomeni, da je lahko bel ali siv. Torej je vrednost stavka, da je lik B siv, enaka 1/2.

Dogovorimo se, da bomo namesto vrednosti stavka govorili o verjetnosti stavka. Stavek je resničen, če je njegova verjetnost 1, in neresničen, če je njegova verjetnost 0.

Verjetnost negacije stavka je 1 minus verjetnost stavka. Torej je verjetnost stavka, da A ni trikotnik, enaka $1 - 1/3 = 2/3$.

Pri t. i. večvrednostnih logikah se izračunava vrednost stavka P in Q kot manjša od vrednosti stavkov P oz. Q, vrednost stavka P ali Q pa kot večja od obeh vrednosti. To seveda omogoča enostavno računanje vrednosti, omejuje pa uporabnost takšne logike. Tako je vrednost stavka, lik A je trikotnik ali lik A ni trikotnik, v trovrednostni logiki enaka 1/2, kar ni v skladu z zdravo pametjo in običajno dvovrednostno logiko. To slabost odpravi verjetnostna logika, vendar za ceno zahtevnejšega pravila izračunavanja sestavljenih stavkov.

Verjetnost stavka P v določenem svetu bomo označevali z $V(P)$.

Pravilo $V(P \text{ in } Q) = V(P) \cdot V(Q)$, ki velja v dvovrednostni logiki, bo veljalo, če sta stavka P in Q neodvisna. Kaj to pomeni?

Stavki, ki govorijo samo o liku A, so neodvisni od stavkov, ki govorijo o liku B.

Prav tako se dogovorimo, da je oblika lika neodvisna od barve in velikosti.

Stavka, da je A trikotnik in da je A kvadrat, pa sta nezdružljiva ali protislovna (torej odvisna). Če sta stavka P in Q nezdružljiva, je $V(P \text{ in } Q) = 0$.

Za disjunkcijo (ali) se pravilo glasi:

$$V(P \text{ ali } Q) = V(P) + V(Q) - V(P \text{ in } Q).$$

Izračunajmo $V(A \text{ je trikotnik ali } B \text{ je siv}) = V(A \text{ je trikotnik}) + V(B \text{ je siv}) - V(A \text{ je trikotnik in } B \text{ je siv}) = 1/3 + 1/2 - 1/3 \cdot 1/2 = 4/6 = 2/3$.

Lahko bi najprej izračunali negacijo stavka:

$V(A \text{ ni trikotnik in } B \text{ je bel}) = V(A \text{ ni trikotnik}) \cdot V(B \text{ je bel}) = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3$.

Naloge:

Izračunaj verjetnost stavkov:

- Lik D je trikotnik in B je bel lik.
- Lik A je trikotnik, B pa je petkotnik.
- Vsi liki so sivi.
- Vsaj en lik je bel.

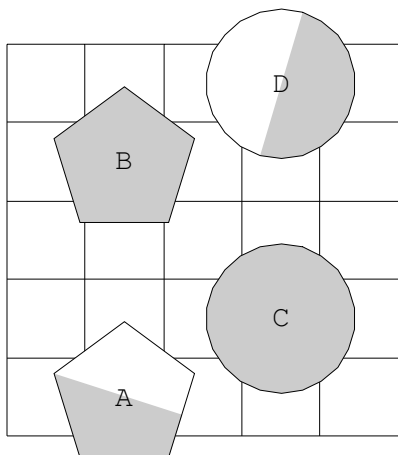
Stavek, da so vsi liki sivi, pomeni isto, kot A je siv in B je siv in C je siv in D je siv.

Terminologijo za verjetnostno logiko smo si sposodili iz matematične teorije, ki se imenuje *verjetnostni račun*. Tam namesto stavkov govorimo o *dogodkih*. Govorimo o verjetnosti dogodka, da je lik A trikotnik. Namesto konjunkcije stavkov P in Q govorimo o *produktu* dogodkov PQ, torej o dogodku, da se zgodita hkrati P in Q. Če pa se zgodi vsaj eden od dogodkov P oz. Q, pa govorimo o *vsoti* dogodkov. Resničnemu stavku ustreza *gotov* dogodek, neresničnemu pa *nemogoč* dogodek. Negaciji stavka ustreza *nasprotni* dogodek.

Tudi pravilo $V(P \text{ ali } Q) = V(P) + V(Q) - V(P \text{ in } Q)$ je znano že iz množic in se mu reče načelo *vklučitev in izključitev*. Če imamo opravka s tremi stavki, se glasi:

$V(P \text{ ali } Q \text{ ali } R) = V(P) + V(Q) + V(R) - V(P \text{ in } Q) - V(P \text{ in } R) - V(Q \text{ in } R) + V(P \text{ in } Q \text{ in } R)$.

Oglejmo si sedaj naslednjo situacijo:



Verjetnost, da so vsi liki sivi, je sedaj $V(A \text{ je siv}) \cdot V(B \text{ je siv}) \cdot V(C \text{ je siv}) \cdot V(D \text{ je siv}) = 1/4$. Stavki so namreč neodvisni drug od drugega.

Kolikšna pa je verjetnost, da sta C in D enake oblike? Izračunati moramo:

$V(C \text{ in } D \text{ sta oba trikotnika ali oba kvadrata ali oba petkotnika})$.

Ker pa se ti stavki izključujejo, je to kar:

$V(C \text{ in } D \text{ sta oba trikotnika}) + V(C \text{ in } D \text{ sta oba kvadrata}) + V(C \text{ in } D \text{ sta oba petkotnika})$.

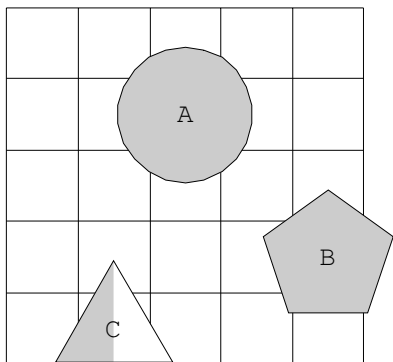
Toda prvi del je $V(C \text{ je trikotnik}) \cdot V(D \text{ je trikotnik}) = 1/3 \cdot 1/3 = 1/9$, saj sta stavka neodvisna.

Verjetnost prvotnega stavka je torej $1/3$.

Zdaj pa se lotimo naslednje naloge: V danem svetu je naključno izbran neki lik.

- Kolikšna je verjetnost, da je izbrani lik a) trikotnik; b) kvadrat; c) da je izbrani lik bel?

2. Recimo, da se je dogodek iz prejšnjega vprašanja zgodil. Kolikšna je verjetnost, da je bil izbran lik A?



Da smo naključno izbrali lik, pomeni, da je verjetnost, da smo izbrali lik A, enaka $1/3$. Enako tudi za B in C.

$V(\text{izbrani lik je trikotnik, če smo izbrali A})$ imenujemo pogojna verjetnost stavka »Izbrani lik je trikotnik« pri pogoju, da »smo izbrali A«. Ta verjetnost je očitno $1/3$. Lahko pa se izračuna kot $V(\text{Izbran je lik A in izbran je trikotnik}) / V(\text{Izbran je lik A})$.

Vendar je lažje ugotoviti pogojno verjetnost neposredno. Mislimo si, da je stavek »Izbran lik je A« resničen, in nato izračunamo vrednost stavka »A je trikotnik«.

Pri verjetnostnem računu se produkt dogodkov računa po obrazcu: $V(PQ) = V(P) \cdot V(Q/P)$.

$V(Q/P)$ je vrednost stavka pri pogoju, da je P resničen. Če je P neresničen, pogojna vrednost ni definirana.

Pojem pogojne verjetnosti nam omogoča, da definiramo pojem neodvisnosti stavkov:

P in Q sta neodvisna $\Leftrightarrow V(P) = V(P/Q)$ ($\Leftrightarrow V(P \text{ in } Q) = V(P)V(Q)$).

Če imamo množico paroma nezdružljivih stavkov (dogodkov), katerih disjunkcija (vsota) je resničen stavek (gotov dogodek), govorimo o *popolnem* sistemu stavkov (dogodkov).

V našem primeru stavki: "Izbran je A, izbran je B, izbran je C", tvorijo popoln sistem.

Pogojne verjetnosti so:

$V(\text{Izbran je trikotnik/Izbran je A}) = 1/3$;

$V(\text{Izbran je trikotnik/Izbran je B}) = 0$, saj je B petkotnik.

$V(\text{Izbran je trikotnik/Izbran je C}) = 1$, saj je C trikotnik.

$V(\text{Izbran lik je trikotnik}) = V(\text{Izbran je A}) \cdot V(\text{Izbran je trikotnik/Izbran je A}) + V(\text{Izbran je B}) \cdot V(\text{Izbran je trikotnik/Izbran je B}) + V(\text{Izbran je C}) \cdot V(\text{Izbran je trikotnik/Izbran je C}) = 1/3 \cdot (1/3 + 0 + 1) = 4/9$. ($1/3$ smo lahko izpostavili).

Ta izračun je poseben primer obrazca za popolno verjetnost.

Zdaj lahko odgovorimo še na vprašanje: Če je bil izbran trikotnik, kakšna je verjetnost, da smo izbrali A?

$V(\text{Izbran je A / Izbran je trikotnik}) = V(\text{Izbran je A in izbran je trikotnik}) = V(\text{Izbran je A}) \cdot$

$(\text{Izbran je trikotnik/Izbran je A}) / V(\text{Izbran je trikotnik}) = (1/3) \cdot (1/3) / (4/9) = 1/4$.

Odgovore na vprašanje lahko strnemo v preglednico:

trikotnik	kvadrat	bel
$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$	1	0

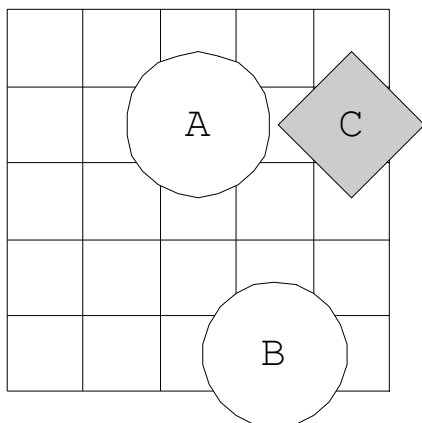
Naloge:

1. Ugotovi verjetnost danih stavkov v 2 situacijah

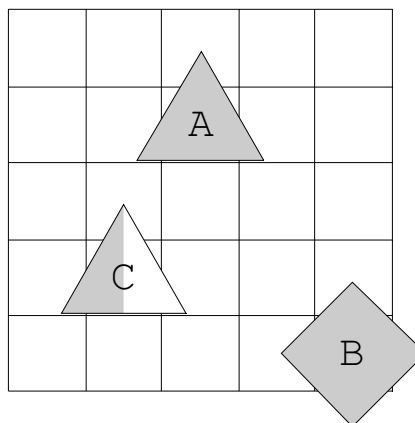
- Lik B ni petkotnik.
- Lik A ni bel.
- Lik B je petkotnik.
- Lik C ni trikotnik.
- Lik B je kvadrat.
- Lik A ni bel.
- Lik C je petkotnik in lik A je petkotnik.
- Lik B je siv in lik A je bel.
- Lik B je siv in lik C je trikotnik.
- Lik C je trikotnik in lik C je trikotnik.
- Lik A je trikotnik ali lik A je bel.
- Lik A je siv in lik C je kvadrat.
- Lik B je siv ali lik A je kvadrat.
- Lik B je siv in lik A je siv.
- Lik B je petkotnik ali lik C je petkotnik.
- Lik A je siv ali lik A je petkotnik.
- Ni res, da: lik B ni petkotnik ali je lik A siv.
- Ni res, da: lik C je bel in lik C ni bel.
- Ni res, da: lik B je bel ali lik C ni trikotnik.
- Ni res, da: lik B je bel ali lik A ni petkotnik.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1																					
2																					

1. situacija



2. situacija



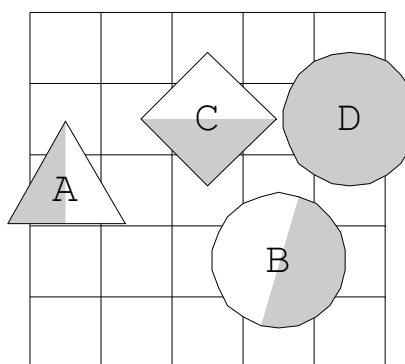
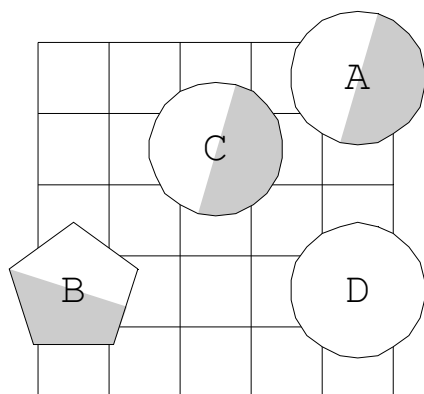
2. Ugotovi verjetnost danih stavkov v 2 situacijah

1. Lik D je kvadrat in lik D je kvadrat.
2. Lik A ni siv in lik A ni bel.
3. Lik B je petkotnik in lik C je kvadrat.
4. Lik C ni siv in lik D je trikotnik.
5. Lik C je siv in lik A ni kvadrat.
6. Lik B je trikotnik ali lik A ni siv.
7. Lik B ni bel ali lik D ni siv.
8. Lik D je bel in lik B ni petkotnik.
9. Lik D je siv ali lik A ni petkotnik.
10. Lik C ni trikotnik in lik D ni petkotnik.
11. Lik A je trikotnik ali je lik D kvadrat.
12. Lik B ni siv ali je lik A siv.
13. Ni res, da: lik A je trikotnik in lik A je siv.
14. Ni res, da: lik C je bel in lik D je trikotnik.
15. Ni res, da: lik B ni trikotnik in lik D ni kvadrat.
16. Ni res, da: lik D ni siv in lik C je siv.
17. Vsaj en lik je siv.
18. Vsak lik je petkotnik.
19. Noben lik ni petkotnik.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2																				

1. situacija

2. situacija



3. Ugotovi verjetnost danih stavkov v 2 situacijah.

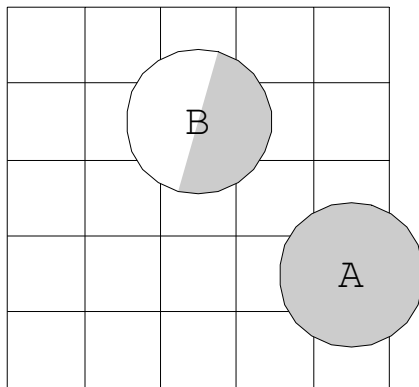
Krog pomeni, da ne poznamo oblike, ki je lahko trikotnik, kvadrat ali petkotnik. Polsiv lik pa pomeni, da ne poznamo barve, ki je lahko bela ali siva.

1. Lik A je trikotnik in lik B je petkotnik.
2. Lik B ni siv in lik B je trikotnik.
3. Lik A ni siv ali lik A ni petkotnik.
4. Lik A ni petkotnik in lik B ni trikotnik.
5. Lik B je siv in lik A ni siv.
6. Lik B je trikotnik in lik B ni trikotnik.
7. Lik B ni trikotnik ali lik B ni siv.
8. Lik A je trikotnik in lik A ni petkotnik.
9. Ni res, da: lik B je trikotnik in lik B ni bel.
10. Ni res, da: lik B ni bel ali je lik A petkotnik.
11. Ni res, da: lik B je kvadrat ali lik B ni bel.
12. Ni res, da: lik B je trikotnik in lik B je petkotnik.
13. Vsak lik je bel.
14. Vsaj en lik je siv.

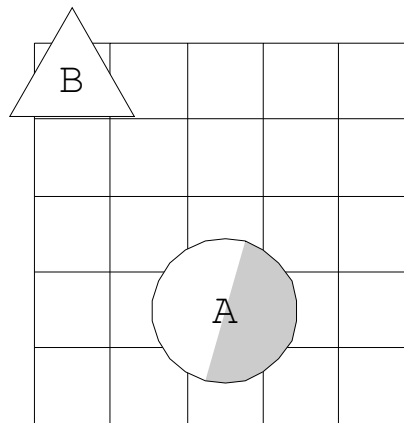
15. Vsak lik je kvadrat.
16. Vsak petkotnik je siv lik.
17. Vsaj en trikotnik je kvadrat.
18. Vsak kvadrat je bel lik.
19. Noben bel lik ni trikotnik.
20. Noben trikotnik ni kvadrat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1																					
2																					

1. situacija

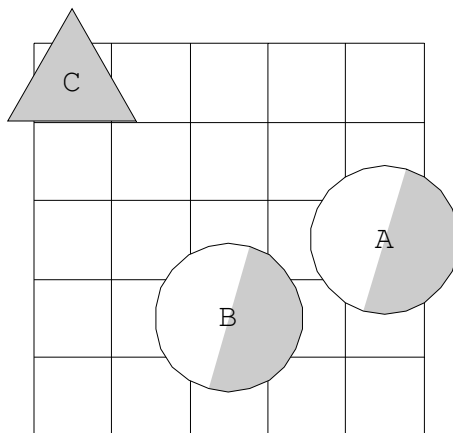


2. situacija



4. V danem svetu je naključno izbran neki lik.

1. Kolikšna je verjetnost, da je izbrani lik a) trikotnik; b) kvadrat; c) da je izbrani lik bel?
2. Recimo, da se je dogodek iz prejšnjega vprašanja zgodil. Kolikšna je verjetnost, da je bil

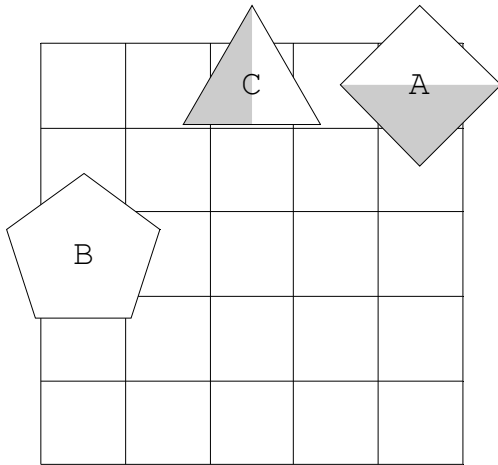


izbrani lik A?

5. V danem svetu je naključno izbran neki lik.

1. Kolikšna je verjetnost, da je izbrani lik a) trikotnik; b) kvadrat; c) da je izbrani lik bel?
2. Recimo, da se je dogodek iz prejšnjega vprašanja zgodil. Kolikšna je verjetnost, da je bil izbran lik A?

Krog pomeni, da ne poznamo oblike, ki je lahko trikotnik, kvadrat ali petkotnik. Posiv lik pa pomeni, da ne poznamo barve, ki je lahko bela ali siva.



Rešitve

1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0
2	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0

2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{27}$	0	0
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{9}$	1	1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{6}$	1
2	0	1	$\frac{5}{6}$	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{5}{6}$	0	1

4.

trikotnik	kvadrat	bel
$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

5.

trikotnik	kvadrat	bel
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1	$\frac{1}{4}$