Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Oddelek za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Zavod za šolstvo SRS, Institut za matematiko, fiziko in mehaniko ter Institut Jožef Stefan prirejajo 23. in 24. januarja 1981

11. seminar iz fizike

FIZIKA POLPREVODNIKOV

Seminar je namenjen učiteljem srednjih in tudi osnovnih šol za strokovno izpopolnjevanje, vabljeni pa so tudi drugi člani društva. Seminar bo v veliki fizikalni predavalnici, Jadranska 26, v Ljubljani.

URNIK PREDAVANJ

Petek, 23. 1.

9.00	Otvoritev seminarja
9.15	Janez Strnad: Energijski pasovi v kristalih (2 uri)
11.15	Jože Pahor: Dioda in tranzistor (2 uri)
16.00	Peter Gosar: Fotoelektrični pojavi (2 uri)

Sobota, 24. 1.

8.15	Andrej Likar: Polprevodniški detektorji
9.15	Janez Stepišnik: Svetleče in laserske diode
10.15	Slobodan Žumer: Termoelektrični pojavi
11.15	Peter Prelovšek: Tunelska dioda
12.15	Seta Oblak: Organizacija aktivov iz fizike

Prispevek je 250.— din na udeleženca seminarja. Vodstva šol in organizacije združenega dela prosimo, da nakažejo prispevek vnaprej na žiro račun Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS št. 50101-678-47233, lahko pa ga plača udeleženec na seminarju. Za seminar se ni treba posebej prijaviti.

Sekretar seminarja
Martina Koman

Vodja seminarja
Janez Stepišnik

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1981
Letnik 28
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. LJUBLJANA • LETNIK 28 • ŠT. 1 • STR. 1—32 • JANUAR 1981

Obzornik mat. fiz. 28 (1981) 1

JEZIK PRVEGA REDA Z ENAKOSTJO

IZIDOR HAFNER

AMS Subj. Class. (1980) 03 B 10

V članku obravnavamo jezik prvega reda z enakostjo s primeri za pouk v srednjih šolah.

FIRST-ORDER LANGUAGE WITH EQUALITY

The first order-language is considered in the article. Applications for secondary school are given.

Jezik prvega reda z enakostjo

1. *Jeziki prvega reda* nam rabijo za formalizacijo matematičnih teorij, npr. teorije obsegov. Vendar pa izrazna moč teh jezikov omogoča formalizacijo le dela teorije, t. i. elementarnega dela, celotno teorijo pa lahko ponavadi opišemo v jeziku drugega reda. Za natančnejši opis jezikov prvega reda glej [3] in [4].

Jezik prvega reda je določen s spiskom osnovnih znakov, ki sestoji iz:

individualnih konstant (v elementarni teoriji urejenih obsegov (***UO***) sta to znaka 0 in 1);

individualnih spremenljivk (v ***UO*** bomo uporabljali $a, b, c, d, x, x_1, x_2, \ldots$);

znakov za relacije ($<$, $=$);

znakov povezave ($\Rightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$);

kvantifikatorjev $\forall$, $\exists$ ter

ločil (,) in vejice.

Definicije *terma, formule, vezane* in *proste spremenljivke* ter okrajšav najdemo v [3].

Uporabljali bomo še **x**, **y**, **z** in **w** kot sintaktične spremenljivke za *zaznamovanje* individualnih spremenljivk;

f in **g** za zaznamovanje funkcijskih znakov;

p in **q** za zaznamovanje predikatnih (relacijskih) znakov;

e za zaznamovanje individualnih konstant;

A, **B** za formule ter

a, **b**, **c** in **d** za zaznamovanje termov.

Po potrebi bomo dodali sintaktičnim spremenljivkam še indekse.

Izraz $\mathbf{b}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ bomo uporabljali za označevanje terma, ki ga dobimo iz terma **b**, če vsako nastopanje spremenljivke **x** *zamenjamo* s termom **a**; izraz $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ bo označeval formulo, ki jo dobimo z vstavo terma **a** na mesto vsakega prostega nastopanja spremenljivke **x** v formuli **A**.

Rekli bomo, da je term **a** *vstavljiv* za **x** v **A**, če za vsako spremenljivko **y**, ki nastopa v **a**, velja, da noben del formule **A** oblike $\forall\mathbf{yB}$ (ali $\exists\mathbf{yB}$) ne vsebuje prostega nastopanja spremenljivke **x** v **A**. Te oznake razširimo tudi za primer večjega števila spremenljivk. Tako bo izraz $\mathbf{b}_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ označeval term, ki ga dobimo iz **b**, če zamenjamo vsa nastopanja spremenljivk $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ s termi $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Kadarkoli bo nastopal izraz $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots,$

$\mathbf{a}_n]$, bodo izrazi $\mathbf{A}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ omejeni na primer, ko je $\mathbf{a}_i$ vstavljiv za $\mathbf{x}_i$ v **A** za $\mathbf{i} = 1, 2, \ldots, n$. Spremenljivke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ bodo vedno zaznamovale različne individualne spremenljivke. Včasih jih bomo izpustili kot indeks v izrazu $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$, če le-ta ne bo pomemben.

2. Naslednji korak pri formalizaciji pa je določitev logičnih aksiomov in pravil sklepanja. Ker smo to v zadostni meri obravnavali v [1], se tu omejimo le na tista, ki so v zvezi z enakostjo. Kot je že znano, izraz »$\vdash_{T} \mathbf{A}$« beremo »*formula* **A** *je dokazljiva v teoriji* ***T***«.

Aksiom identitete je formula oblike $\mathbf{x} = \mathbf{x}$. *Aksiom enakosti* je formula oblike

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n \Rightarrow \mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \mathbf{fy}_1 \ldots \mathbf{y}_n$$

ali pa oblike

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n \Rightarrow (\mathbf{px}_1 \ldots \mathbf{x}_n \Rightarrow \mathbf{py}_1 \ldots \mathbf{y}_n)$$

Ti aksiomi zadoščajo, da dokažemo

$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a} \qquad \textit{(simetričnost)}$$

$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c} \qquad \textit{(tranzitivnost)}$$

ter bolj splošno *pravilo enakosti:*

Naj bo $\mathbf{b}'$ *term, ki ga dobimo iz terma* **b** *tako, da zamenjamo nekaj nastopanj termov* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, *ki niso v področju kvantifikatorjev, s termi* $\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_n'$, *in naj bo formula* $\mathbf{A}'$ *dobljena iz formule* **A** *na podoben način. Če velja* $\vdash \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1', \ldots, \vdash \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n'$, potem velja $\vdash \mathbf{b} = \mathbf{b}'$ in $\vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}'$.

Posledica 1: $\vdash \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1' \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n' \Rightarrow \mathbf{b}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] = \mathbf{b}[\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_n']$

Posledica 2: $\vdash \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1' \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n' \Rightarrow (\mathbf{A}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \Leftrightarrow \mathbf{A}[\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_n'])$

Vidimo torej, da sta recimo pri številskih enačbah »množenje z leve oziroma desne« čisto logična koraka: posledica aksioma enakosti za funkcijo, ki dvema številoma priredi produkt:

Če velja $\vdash \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, potem velja $\vdash \mathbf{a}_1 . \mathbf{x} = \mathbf{a}_2 . \mathbf{x}$ in $\vdash \mathbf{x} . \mathbf{a}_1 = \mathbf{x} . \mathbf{a}_2$.

Opomba. V matematični logiki sta »identičnost« in »enakost« sinonima. To pa ne velja za slovensko verzijo nove matematike. Če namreč velja

$$m\,\{x\,x\,x\,x\,x\} = 5$$

potem velja $x = x$ in $x \neq x$ $(\neg\, x = x)$, ker eno ime označuje več reči.

3. Izrek, podoben pravilu enakosti, je *pravilo ekvivalence:*

Predpostavimo, da smo formulo $\mathbf{A}'$ *dobili iz formule* **A** *z zamenjavo nekaterih nastopanj formul* $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ *s formulami* $\mathbf{B}_1', \ldots, \mathbf{B}_n'$. *Če velja*

$$\vdash \mathbf{B}_1 \Leftrightarrow \mathbf{B}_1', \ldots, \vdash \mathbf{B}_n \Leftrightarrow \mathbf{B}_n'$$

potem velja

$$\vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}'$$

To pravilo je še posebej važno pri uporabi definicij. Od izvedenih pravil, ki jih najpogosteje uporabljamo, je pravilo *vstave (zamenjave):*

Pravimo, da smo $\mathbf{A}'$ dobili *z vstavo* iz formule **A**, če je $\mathbf{A}'$ oblike $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$. *Če velja* $\vdash \mathbf{A}$, *potem velja* $\vdash \mathbf{A}'$.

Tako z vstavo v formulo $a + 0 = a$ dobimo $0 + 0 = 0$. Tu smo vstavili 0 na mesto spremenljivke a (to dejstvo bomo zapisovali z $0/a$). V dokazovanju običajno ne navajamo natančno, za katero vstavo gre, saj naj bi bilo to razvidno iz obeh formul **A** in **A'**.

Razširitev teorije z definicijami

Za vsako matematično teorijo so značilni tisti aksiomi, ki določajo lastnosti te teorije, zato jih imenujemo *lastni aksiomi* te teorije. Te moramo razlikovati od *aksiomov logike.*

Oglejmo si zdaj problem uvajanja novega predikatnega ali funkcijskega znaka v teorijo. Recimo, da želimo vpeljati znak $\leqq$ v teorijo urejenih obsegov. To lahko naredimo tako, da se dogovorimo, da je $\mathbf{a} \leqq \mathbf{b}$ okrajšava za $\mathbf{a} < \mathbf{b} \vee \mathbf{a} = \mathbf{b}$. Seveda pa tedaj $\leqq$ ni predikatni simbol in izrazi, v katerih nastopa, so le okrajšave za formule, v katerih $\leqq$ ne nastopa.

Bolj sprejemljiva rešitev pa je ta, da tvorimo razširitev teorije UO tako, da dodamo nov aksiom

$$x \leqq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$$

Oglejmo si splošno situacijo. Imejmo neko teorijo $\boldsymbol{T}$, različne spremenljivke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ in formulo **D**, v kateri nobena spremenljivka razen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ ne nastopa prosto. Potem tvorimo novo teorijo $\boldsymbol{T}'$ tako, da dodamo k $\boldsymbol{T}$ novi n-mestni predikatni simbol **p** in nov lastni aksiom

$$\mathbf{p}\,\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \Leftrightarrow \mathbf{D}$$

ki ga imenujemo definicijski aksiom za **p**.

Opišimo sedaj še splošno situacijo za uvedbo funkcijskega znaka ali individualne konstante. Imejmo teorijo $\boldsymbol{T}$, različne spremenljivke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, **y**, **y'** ter formulo **D**, v kateri ne nastopa prosto nobena spremenljivka razen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, **y**. Imejmo še

$$\vdash_{\boldsymbol{T}} \exists \mathbf{y}\, \mathbf{D} \tag{1}$$

$$\vdash_{\boldsymbol{T}} \mathbf{D} \wedge \mathbf{D}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}'] \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}' \tag{2}$$

Potem tvorimo teorijo $\boldsymbol{T}'$ iz $\boldsymbol{T}$ tako, da dodamo nov n-mestni funkcijski znak **f**, nov lastni aksiom

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\,\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \Leftrightarrow \mathbf{D}$$

ki ga imenujemo definicijski aksiom za znak **f**. Trditev (1) imenujemo *eksistenčni pogoj* in trditev (2) *pogoj enoličnosti* za znak **f**. Eksistenčni pogoj zahteva, da ima funkcija vrednost pri vsakem izboru argumentov. Pogoj o enoličnosti pa dopušča največ eno funkcijsko vrednost.

Izrek, da obe vrsti definicij ne prispevata nič ,bistveno novega', preberi v [4].

V posebnem primeru je **D** kar formula $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, kjer je **a** term, v katerem nastopajo le spremenljivke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Eksistenčni pogoj $\exists \mathbf{y}\,(\mathbf{y} = \mathbf{a})$ sledi iz $\mathbf{a} = \mathbf{a}$, pogoj enoličnosti

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{y}' = \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

pa iz lastnosti enakosti. V tem primeru funkcijskega znaka ne vpeljemo z ekvivalenco $\mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{a}$, temveč z identiteto $\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$.

Primer: V teoriji množic je $\in$ osnovni simbol. Če želimo vpeljati funkcijo Pr z definicijo

$$z = Pr(x, y) \Leftrightarrow \forall u\,(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

moramo prej dokazati naslednji formuli

$$\exists z\, \forall u\,(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y) \tag{3}$$

$$\forall u\,(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y) \wedge \forall u\,(u \in z' \Leftrightarrow u = x \vee u = y) \Rightarrow z = z' \tag{4}$$

Eksistenčni pogoj (3) je kar aksiom o paru. Iz hipotez v (4) sledi $\forall u\,(u \in z \Leftrightarrow u \in z')$, nato pa $z = z'$ po aksiomu ekstenzionalnosti [4]. Zapomnimo si, da je »$\{x, y\}$« okrajšava za »$Pr(x, y)$« in da je

$$Pr(x, y) = Pr(y, x) \quad \text{oziroma} \quad \{x, y\} = \{y, x\}$$

izrek, ki ga je treba dokazati.

Funkcijo, ki poljubnemu objektu priredi množico, ki ima to reč za svoj edini element, definiramo

$$Sg(x) = Pr(x, x) \quad (= \{x, x\})$$

in tu ni treba ničesar dokazovati (»$\{x\}$« je okrajšava za »$Sg(x)$«). Nato definiramo »urejen par«

$$Up(x, y) = Pr(Sg(x), Pr(x, y)) \quad (= \{\{x\}, \{x, y\}\})$$

(namesto »$Up(x, y)$« pišemo običajno »(x, y)«).

Elementarna teorija obsegov

1. Naslednje formule (identitete) so lastni aksiomi teorije obsegov:

01. $(a + b) + c = a + (b + c)$
02. $a + 0 = a$
03. $(-a) + a = 0$
04. $a + b = b + a$
05. $(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$
06. $a \,.\, 1 = a$
07. $a \neq 0 \Rightarrow \exists b\,(b \,.\, a = 1)$
08. $a \,.\, b = b \,.\, a$
09. $a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$
010. $0 \neq 1$

2. Dogovorimo se, da bomo namesto »$x \,.\, y$« pisali »xy« in da bomo opuščali oklepaje glede na običajni prednostni red operacij. Ker so formalni dokazi izrekov dolgi, se dogovorimo, da izpeljave »iz $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ sledi $\mathbf{b} = \mathbf{a}$« ne bomo nikoli omenjali in da bomo, kjer je le mogoče, uporabljali izpeljana pravila. Tako bomo v skladu z *izrekom o dedukciji* [1] dokazovali implikacijo

$$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_n \Rightarrow \mathbf{B}$$

tako, da bomo privzeli formule $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ kot hipoteze in jih bomo v dokazu omenili kot **HP**(n). Dokaz formule **B** lahko tolmačimo kot implikacijo

$$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_n \Rightarrow \mathbf{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{B}_m \wedge \mathbf{B}$$

kjer je vsaka formula $\mathbf{B}_i$ (ter $\mathbf{B}$) logična posledica formul $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{i-1}$ ter že dokazanih izrekov.

3. Nekaj izrekov teorije obsegov.

011. $a + (-a) = 0$ [**04**, **03**]

Oglati oklepaj našteva formule, katerih logična posledica je dana vrstica, v tem primeru formul

$$a + (-a) = (-a) + a \quad \text{ter} \quad (-a) + a = 0$$

012. $x + a = x' + a \Rightarrow x = x'$
DK **HP** (1) $\Rightarrow$
(2) $(x + a) + (-a) = (x' + a) + (-a)$ [(1)]
(3) $x + (a + (-a)) = x' + (a + (-a))$ [(2), **01**]
(4) $x + 0 = x' + 0$ [(3), **011**]
$x = x'$ [(4), **02**]

013. $x + a = b \wedge x' + a = b \Rightarrow x = x'$ [**012**]

014. $\exists x\, (x + a = b)$
DK
(1) $b + 0 = b$ [**02**]
(2) $b + ((-a) + a) = b$ [(1), **03**]
(3) $(b + (-a)) + a = b$ [(2), **01**]
$\exists x\, (x + a = b)$ [(3)]

Sedaj lahko vpeljemo definicijo

D1 $x = b - a \Leftrightarrow x + a = b$

Izreka **013** in **014** sta pogoj enoličnosti in eksistenčni pogoj za znak »—«.

015 $x = b - a \Rightarrow x = b + (-a)$
DK **HP** (1) $\Rightarrow$
(2) $x + a = b$ [(1), **D1**]
(3) $(x + a) + (-a) = b + (-a)$ [(2)]
(4) $x + (a + (-a)) = b + (-a)$ [(3), **01**]
(5) $x + 0 = b + (-a)$ [(4), **011**]
$x = b + (-a)$ [(5), **02**]

017 $b - a = b + (-a)$ [**015** $b - a/x$]

Formulo **017** bi bili lahko vzeli za definicijo znaka »—«. Potem bi seveda formulo **D1** dokazali kot izrek.

018 $a - a = 0$
DK
(1) $a - a = a + (-a)$ [**017**]
$a - a = 0$ [(1), **011**]

019 $a = 0 - (-a)$ [**D1**, **011**]

020 $-a = 0 - a$ [**D1**, **03**]

021 $a = 0 + (-(-a))$ [**019**, **017**, $0/b$, $-a/a$]

022 $a = -(-a)$

DK
(1) $a = -(-a) + 0$ [**021**, **04**]
$a = -(-a)$ [(1), **02**]

023 $-0 = 0$
DK
(1) $-0 + 0 = -0$ [**02** $-0/a$]
(2) $-0 + 0 = 0$ [**03** $0/a$]
$-0 = 0$ [(1), (2)]

024 $x + y = x \Rightarrow y = 0$
DK **HP** (1) $\Rightarrow$
(2) $x + y = x + 0$ [(1), **02**]
$y = 0$ [(2), **012**, **04**]

025 $0 . a = 0$
DK
(1) $a\,(a + 0) = a\,a$ [**02**]
(2) $a\,a + a . 0 = a\,a$ [(1), **09**]
(3) $a . 0 = 0$ [(2), **024**]
$0 . a = 0$ [(3), **08**]

026 $-(a + b) = (-a) + (-b)$
DK
(1) $(a + b) + (-a + (b)) = (-a + a) + (-b + \mathrm{b})$ [**01**, **04**]
(2) $(a + b) + (-a + (-b)) = 0 + 0$ [(1), **03**]
(3) $(a + b) + (-a + (-b)) = 0$ [(2), **02**]
(4) $(a + b) + (-(a + b)) = 0$ [**011**]
$-(a + b) = -a + (-b)$ [(4), (3), **012**, **04**]

V točki (1) je treba komutativnost in asociativnost uporabiti večkrat.

027 $(-a)\, b = -(a\, b)$
DK
(1) $a\,b + (-a)\,b = (-a + a)\,b$ [**09**, **08**, **04**]
(2) $a\,b + (-a)\,b = 0$ [(1), **02**, **025**]
(3) $a\,b + (-(a\,b)) = 0$ [**011**]
$(-a)\,\mathrm{b} = -(a\,b)$ [(2), (3), **013**, **04**]

028 $(-a)\,(-b) = a\,b$
DK
(1) $(-a)\,(-b) = -(a\,(-b))$ [**027** $-b/b$]
(2) $a\,(-b) = -(a\,b)$ [**027** b/a, a/b, **08**]
(3) $(-a)\,(-b) = -(-(ab))$ [(1), (2)]
$(-a)\,(-b) = a\,b$ [**022**, (3)]

Formulo (1) smo dobili z vstavo v izrek **027** terma —b za spremenljivko b.

4. Če želimo vsakokrat omeniti vse uporabe aksiomov, so dokazi še precej daljši. Tako identitete dokažemo npr. takole:

$$(x + y) + (z + u) = (x + z) + (y + u)$$

Dokaz
(1) $(x + y) + (z + u) = ((x + y) + z) + u$ [**01** $x + y/a$, z/b, u/c]
(2) $((x + y) + z) + u = (x + (y + z)) + u$ [**01** x/a, y/b, z/c]
(3) $(x + (y + z)) + u = (x + (z + x)) + u$ [**04** y/a, z/b]

(4) $(x + (z + y)) + u = ((x + z) + y) + u$ [**01** x/a, z/b, y/c]
(5) $((x + z) + y) + u = (x + y) + (y + u)$ [**01** $x + z/a$, y/b, u/c]
$(x + y) + (z + u) = (x + z) + (y + u)$ [(1), (2), (3), (4), (5)]

Vrstici (1) in (5) smo dobili z vstavo v aksiom **01**. Vrstici (2) in (4) smo dobili tako, da smo k rezultatu vstavitve v **01** dodali na desni u. Vrstico (3) smo dobili tako, da smo k komutativnostnemu zakonu (**04**) dodali x z leve, nato pa u z desne. Iskani izrek je posledica (1), (2), (3), (4) in (5) ter tranzitivnosti enakosti. Učitelju priporočam, da na tak način dokaže z učenci več izrekov iz učbenika [2].

5. Problem deljenja z 0

V teorijah prvega reda, v katerih velja princip identitete $\mathbf{a} = \mathbf{a}$, mora vsak term brez spremenljivk označevati objekt. V teorijo obsegov ne moremo uvesti definicije

$$x = a / b \Leftrightarrow a = x b$$

saj niti eksistenčni pogoj niti pogoj enoličnosti za znak / nista dokazljiva. Formula

$$\exists x\, (a = x b)$$

ne velja zaradi primera $a = 1$, $b = 0$; formula

$$a = x b \wedge a = x' b \Rightarrow x = x'$$

pa ne velja zaradi primera $a = 0$, $b = 0$, $x = 1$, $x' = 2$. Ena možnost bi bila, da bi definirali

D2 $x = a / b \Leftrightarrow (b \neq 0 \Rightarrow a = x b) \wedge (b = 0 \Rightarrow x = 0)$

torej tako, da bi rezultat deljenja z nič poljubno izbrali. Seveda smo tako pridobili nepričakovan rezultat

$$1 / 0 = 0 = 0 / 0$$

vendar pa je glede deljenja s števili, različnimi od nič, vse lepo in prav.

Pogoj o enoličnosti za / bomo pokazali z analizo primerov: najprej bomo predpostavili $b \neq 0$, nato $b = 0$.

029 $(b \neq 0 \Rightarrow a = x b) \wedge (b = 0 \Rightarrow x = 0) \wedge$
$(b \neq 0 \Rightarrow a = x' b) \wedge (b = 0 \Rightarrow x' = 0) \Rightarrow x = x'$

DK **HP** (4)
(5) $b \neq 0 \Rightarrow$
(6) $a = x b$ [(1), (5)]
(7) $a = x' b$ [(3), (5)]
$\exists y$
(8) $y b = 1$ [(5), **07**]
(9) $b y = 1$ [(8), **08**]
(10) $a y = (x b) y$ [(6)]
(11) $a y = (x' b) y$ [(7)]
(12) $x (b y) = x' (b y)$ [(6), (7), **05**]

(13) $x\, 1 = x'\, 1$ [(9), (12)]
(14) $x = x'$ [(13), **06**]
(15) $b = 0 \Rightarrow$
(16) $x = 0$ [(2), (15)]
(17) $x' = 0$ [(4), (15)]
(18) $x = x'$ [(16), (17)]

Izrek nato sledi iz izreka $b = 0 \vee b \neq 0$ ter vrstic (14) in (18).

Tudi eksistenčni pogoj bomo dokazali z analizo primerov

030 $\exists x\, ((b \neq 0 \Rightarrow a = x b) \wedge (b = 0 \Rightarrow x = 0))$

DK
(1) $b \neq 0 \Rightarrow$
$\exists z$
(2) $z b = 1$ [(1), **07**]
(3) $(a z) b = a$ [(2), **06**, **05**]
$\exists x$
(4) $x b = a$ [(3)]
(5) $b \neq 0 \Rightarrow x b = a$ [(4)]
(6) $b = 0 \Rightarrow x = 0$ [(1), zakon protislovja]
(7) $b = 0 \Rightarrow$
$\exists x$
(8) $b = 0 \Rightarrow x = 0$ [$\exists x\, (x = 0)$ je izrek logike]
(9) $b \neq 0 \Rightarrow a = x b$ [zakon protislovja]

Izrek nato sledi zaradi $b = 0 \vee b \neq 0$ ter (5), (6), (8) in (9).

Modeli za elementarno teorijo obsegov

1. Jezik prvega reda, v katerem smo formalizirali elementarno teorijo obsegov, ni zadosti bogat, da bi lahko v njem izrazili takšne trditve, kot je npr.: »Obseg $\boldsymbol{O}_1$ je izomorfen obsegu $\boldsymbol{O}_2$.« Takšne trditve običajno formuliramo v jeziku teorije množic. Najprej pa se vprašamo, kaj je to obseg.

Definicija. Urejena šesterica ($\mathcal{D}$, 0, 1, —, +, .) *je obseg* natanko tedaj, kadar v domeni $\mathcal{D}$ veljajo aksiomi **01** do **010**.

Znaki $\mathcal{D}$, 0, 1, —, +, . so tu spremenljivke, funkcijski znaki v jeziku prvega reda pa so konstante. Toda tu gre za drug jezik.

Včasih namesto o urejeni šesterici govorimo o šestmestni relaciji »*Množica* $\mathcal{D}$ *skupaj z operacijami* 0, 1, —, +, . *je obseg . . .*«

Ta definicija je torej odvisna od osnovnih simbolov in vrstnega reda. Torej, če je šesterica ($\mathcal{D}$, 0, 1, —, +, .) obseg, potem skoraj gotovo reči $\mathcal{D}$, ($\mathcal{D}$, 0, 1, —, ., +), ($\mathcal{D}$, +, .) niso obsegi.

Vprašanje: »Kaj je ničla obsega ($\mathcal{A}$, x, y, f, g, h)?« ima trivialen odgovor — x, to je druga komponenta urejene šesterice.

Odgovor na vprašanje: »Ali je množica $\mathcal{A}$ skupaj z operacijami f, g, h obseg?« je seveda nikalen.

Če želimo temu vprašanju dati vsebino, moramo definirati:

Množica $\mathcal{D}$ skupaj z operacijami f, g, h je 'obseg' natanko tedaj, kadar obstajata taka elementa x in y iz $\mathcal{D}$, da je množica $\mathcal{D}$ z operacijami x, y, f, g, h obseg.

2. Imejmo obseg ($\mathcal{D}$, 0, 1, —, +, .). Potem lahko konstruiramo neki nov obseg, ki bo le-temu izomorfen. Množica

$$\mathcal{D}' = \{\{x\} \mid x \in \mathcal{D}\}$$

opremljena z operacijami $\{0\}$, $\{1\}$, —, +, .
kjer so zadnje tri operacije definirane z enačbami

$$-\{x\} = \{-x\}, \{x\} + \{y\} = \{x + y\}, \{x\} . \{y\} = \{x . y\}$$

je obseg, izomorfen prvotnemu obsegu, kjer je izomorfizem preslikava, definirana na $\mathcal{D}$, ki $x \in \mathcal{D}$ priredi $\{x\} \in \mathcal{D}'$.

Bolj zanimiva pa je neka podobna struktura, v kateri so definirane operacije z vsemi podmnožicami množice $\mathcal{D}$, npr. seštevanje:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{x + y \mid x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

V tej strukturi velja

$$\mathcal{A} + \emptyset = \emptyset \qquad (\emptyset \text{ je prazna množica})$$

$$\mathcal{A} + \{0\} = \mathcal{A}$$

Tu lahko definiramo deljenje

$$\mathcal{X} = \mathcal{A}/\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{X} \cdot \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \wedge \forall \mathcal{X}'(\mathcal{X}' \cdot \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X})$$

V tem primeru velja

$$\{0\} / \{0\} = \mathcal{D}$$

$$\{1\} / \{0\} = \emptyset$$

LITERATURA

[1] I. Hafner, *Izrek o dedukciji*, Obzornik mat. fiz., **25** (1978) 34—40.
[2] F. Križanič, *Aritmetika, algebra in analiza*, I. *del*, DZS 1968.
[3] N. Prijatelj, *Formalna izgradnja logičnega jezika*, Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 20—33.
[4] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wessley 1967.

VII. KONGRES MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV JUGOSLAVIJE

VII. kongres matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije je bil od 6. do 11. oktobra 1980 v Bečićih pri Budvi. Udeležilo se ga je 1460 strokovnjakov iz Jugoslavije in nekaterih sosednjih držav s 578 referati. Med njimi je bilo 26 Slovencev, ki so imeli 19 referatov.

MATEMATIKA

Analiza — splošni problemi
J. Vukman, *Realna simetrična Banachova algebra z involucijo*
A. Volčič, *Integral in mera*

Topologija
T. Pisanski, *Kratek dokaz nekega izreka A. T. Whitea*

Numerična matematika
Z. Bohte, *Nove metode za računanje odvoda determinate*
S. Indihar, *Multilinearno programiranje*

Pouk matematike
A. Cokan, *Pouk računalništva v srednjih šolah v SR Sloveniji*
A. Cokan, *Usklajevanje učnih načrtov za matematiko v osnovnem izobraževanju in v skupni vzgojno-izobrazbeni osnovi srednjega usmerjenega izobraževanja v SFRJ*
I. Mulec, *Informacija o modernizaciji osnovnošolskega pouka matematike v SR Sloveniji*

FIZIKA

Fizika delcev
J. Strnad, *Šestrazsežni prostor-čas v teoriji elektrošibke interakcije*

Atomska fizika
M. Kregar, *Hevristični atomski model*

Fizika trdega stanja
J. Pirnat, J. Lužnik, Z. Trontelj, V. Kavčič, *Študij in primerjava hidratov* $SnCl_2 . 2 H_2O$ in $SnCl_2 . 1 . 5 H_2O$
J. Pirnat, J. Lužnik, A. Kogovšek, E. Srebotnjak, Z. Trontelj, *Kalorimeter z vgrajenim mikroračunalnkom*

Pouk fizike
A. Kregar, *Elementarna obravnava ohranitvenih zakonov elektromagnetnega polja*
J. Strnad, *Kvantna mehanika za začetnike*
J. Strnad, *Postopna pot v posebno teorijo relativnosti*
J. Ferbar, *Vaje iz fizike za učence*
J. Lekić, *Eksperimentalna oprema za pouk in vaje iz fizike*
T. Skulj, *Sistem naprav in osnovna oprema v prostorih za pouk in vaje iz fizike*
A. Kregar, *Projekt začetnega pouka fizike v Sloveniji*

Med kongresom je bila tudi razstava jugoslovanskih knjig in revij ter učnih pripomočkov. Komisija za tisk DMFA SRS je sodelovala na razstavi s svojimi publikacijami in z nekaterimi matematičnimi in fizikalnimi publikacijami slovenskih založb. Zanimanje za slovensko matematično, fizikalno in astronomsko literaturo je bilo presenetljivo veliko.

Na skupščini Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov so izvolili novo kolektivno vodstvo. Do izbora delegatov republiških društev bodo v predsedstvu predsedniki republiških društev in pokrajin. Predsedujoči predsedstva ima mandatno dobo eno leto. V sekretariat Zveze so bili izbrani: dr. Predrag Obradović, izredni prof. (generalni sekretar), dr. Miograd Petrović, doc. (seketar za matematiko), dr. Slobodan Backović, doc. (sekretar za fiziko), (vsi iz Titograda), dr. Djordje Teleki, znanstveni svetnik, Beograd (sekretar za astronomijo) in mag. Blagoje Cerović, prof. višje šole, Nikšić (blagajnik). Sedež sekretariata je za pet let v Titogradu.

Naslednji, osmi kongres Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov bo leta 1985 v Prištini.

Ciril Velkovrh