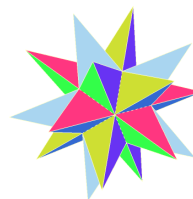
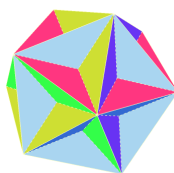
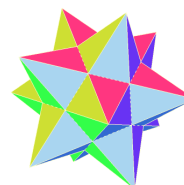
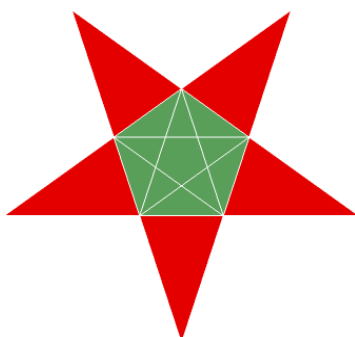
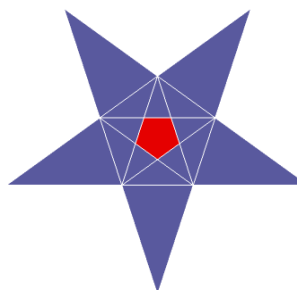


Ozvezdenje poliedrov

Če postavimo pravilni dvanajsterec na mizo, potem je natanko ena mejna ploskev vzporedna mejni ploskvi, ki je na mizi. Drugih 10 ploskev seka ravnino mize oz. izbrane mejne ploskve. Presečišča ravnin so premice. Tako dobimo deset premic, ki tvorijo t.i. *diagram ozvezdenja*.

Mejne ploskve, ki imajo skupen rob z mejno ploskvijo na ravnini, tvorijo notranji petkotnik, če pa povezujemo vsako drugo premico, dobimo notranji pentagram. Presečišča ravnin petih mejnih ploskev, ki z izbrano ploskvijo nimajo skupnih točk, pa tvorijo večji petkotnik in večji pentagram. V diagramu smo narisali le dele premic do medsebojnih presečišč. Končne dele, na katere so premice razdelile ravnino, imenujemo področja, za prostor pa rečemo, da je podeljen v *celice*. Če upoštevamo peterno simetrijo, lahko celice razdelimo v štiri skupine, ki ustrezajo omenjenim likom. Če te like postavimo na vsako od 12 mejnih ploskev, dobimo štiri poliedre. Prvi je kar prvotni dvanajsterec, drugi sestoji iz 12 pentagramov in se imenuje mali ozvezdeni dvanajsterec, tretji ima za mejne ploskve petkotnike, vendar se ti med seboj sekajo, tako da je *ogliščna konfiguracija* pentagram. Temu telesu pravimo *veliki dvanajsterec*. Če kot mejne ploskve upoštevamo večje pentagrame, dobimo *veliki ozvezdeni dvanajsterec*. Ta štiri telesa (če ne upoštevamo prvotnega dvanajsterca pa tri), so edina ozvezdenja dvanajsterca. Pri izdelavi teles iz mrež upoštevamo le dele mejnih ploskev, ki se vidijo. Ti deli so v naših primerih trikotniki. Naslednja diagrama in slike so narejeni s programom *Great stella* [3].



Ozvezdenje dvajseterca

Dvajseterec ima bolj zahteven diagram ozvezdenja. Le-ta sestoji iz 18 črt, kjer se ravnina izbrane mejne ploskve seka z ravninami 18 drugih mejnih ploskev (ena pa je vzporedna). Te črte delijo izbrano ravnino na 66 končnih področij. Vprašanje je, kako izbrati ta področja, da bo končen rezultat polieder, ki ima isto simetrijo kot dvajseterec.

Nekaj primerov ozvezdenja dvajseterca je bilo objavljenih l. 1900 v knjigi Maxa Brucknerja *Vielecke und Vielflache*. Razen velikega dvajseterca, sestave petih osmercev, sestav petih in desetih četvercev, ki jih je poznal že Cauchy, je v knjigi opisano še šest drugih.

Devet novih ozvezdenj je odkril Albert Harry Wheeler, kar je pomenilo 19 ozvezdenj, če vključimo še sam dvajseterec. Njegovo delo je spodbudilo iskanje novi ozvezdenj, vendar je bila potrebna definicija tega pojma. Naslednje kriterije je predlagal J. C. P. Miller [1].

(1) Mejne ploskve ozvezdenja morajo biti na istih ravninah kot mejne ploskve prvotnega telesa.

(2) Področja (celice), ki tvorijo mejne ploskve, morajo biti enaka v vseh ravninah. Ni pa nujno, da so ta področja povezana.

(3) Celice, ki so vključene v ravnini, morajo imeti isto rotacijsko simetrijo kot prvotna mejna ploskev. To skupaj s točko (2) pomeni, da ozvezdenje ohranja rotacijsko simetrijo prvotnega telesa.

(4) Celice, vključene v ravnini, morajo biti dostopne v kompletiranem ozvezdenju.

(5) Sestavi enostavnejših ozvezdenj so izključeni. Bolj natančno, ne dovolimo unije dveh ozvezdenj, če nimata stikov ploskve s ploskvijo, razen kombinacij zrcalnih podob.

Uporaba teh pravil je reducirala število ozvezdenj. Tako ostane 31 ozvezdenj z zrcalno simetrijo in 27, ki nastopajo kot levi in desni par.

Popoln seznam ozvezdenj dvajseterca je bil objavljen v knjižici *The Fifty-nine Icosahedra*.

Med štirimi avtorji je J. F. Petrie prispeval ilustracije, H. T. Flather pa je ustvaril modele, ki so danes na matematičnem oddelku v Cambridgeu. H. M. S. Coxeter in Patric Du Val sta napisala tekst in vsak svoj način preštevanja. Coxeter je uporabil dvodimenzionalni pristop, Du Val je delal s trodimenzionalnimi celicami.

Naslednji problem je bil, kako opisati posamezno ozvezdenje. Du Valov pristop je bil v klasifikaciji celic in v seznamu celic, ki so vključene v ozvezdenju.

Za zgled vzemimo enostavnejši primer dvanajsterca. Vsaki celici priredimo število, ki meri razdaljo celice od centralne celice, ki je v tem primeru sam dvanajsterec. Indeks celice je število mejnih ploskev, ki jih seka ravna črta od celice do središča. Za dvanajsterec imamo naslednje indekse:

0: dvanajsterec,

1: 12 piramid,

2: 30 klinastih robov velikega dvanajsterca,

3: 20 bodic v obliki tristrane piramide.

Sloj tvorijo vse celice istega indeksa. Sloji tvorijo zaporedje koncentričnih lupin, ki prekrivajo jedro. Vsak sloj je označen z malo črko. Dvanajsterec je označen z **a**, piramide z **b**, klinasti robovi s **c** in bodice z **d**. Pri opisu ozvezdenja je koristna tudi oznaka za vse sloje, ki imajo enak ali manjši indeks od danega števila. Tako dvanajsterec označimo z **A**, končno ozvezdenje pa z **D**.

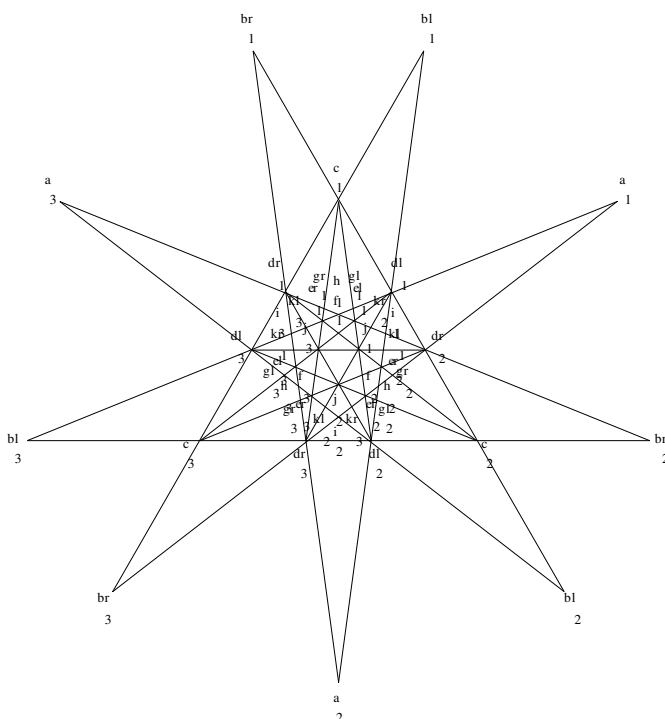
Za vsak začeten polieder imenujemo ozvezdenja **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, ... glavno zaporedje. To je najbolj naravno zaporedje in edino, ki je smiselno urejeno. **B** je torej prvo ozvezdenje, **C** drugo, ...

Naslednje slike prikazujejo glavno zaporedje.

Prvo ozvezdenje dvajseterca dobimo s postavitvijo nizkih trikotnih piramid na mejne ploskve dvajseterca. Drugo ozvezdenje je sestava petih osmercev. Če podaljšamo mejne ploskve te sestave, dokler se spet ne srečajo, dobimo ozvezdenje **D**. **G** je poznan kot veliki dvajseterec, ki ga je poznal že Poincot. Končno ozvezdenje je popolni (kompletirani) ikozaeder.

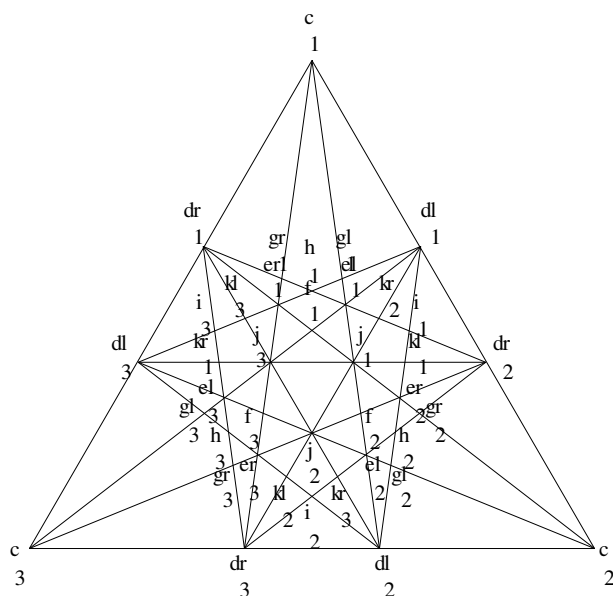
Ta nomenklatura je uporabna za označevanje celic in njihovih kombinacij pri ozvezdenju poljubnega konveksnega poliedra. V primeru dvajseterca je stvar bolj zanimiva, ker trije od osmih slojev vsebujejo celice različnih vrst. En sloj vsebuje tudi zamaknjene celice. Sloja **e** in **g** lahko razbijemo na celice dveh vrst. Te označimo **e1**, **e2**, **g1**, **g2**. Vsa ta štiri ozvezdenja imajo lastnosti, ki do sedaj niso bile poznane. To niso poliedri v običajnem smislu, ampak imajo celice, ki so samo ogliščno povezane. Druga ozvezdenja so robovno povezana, to je, mejne ploskve imajo skupen rob.

Sloj **f** je najbolj nenavaden. Celice ene vrste, **f2**, so popolnoma nepovezane. Druge celice sloja, **f1**, lahko razdelimo na zrcalno simetrične pare. Vključitev enega tipa npr. **f1** ima za posledico zavrteno obliko. Takšna je sestava petih četvercev **Ef1**.



S primerjavo slik si lahko predstavimo različne možnosti kombiniranja. Na primer, če dodamo celice **g1** k **Fg2**, dobimo veliki ikozaeder, to je **G**. Naslednji diagram ozvezdenja in slike so narejeni s programom Mathematica z uporabo [4].

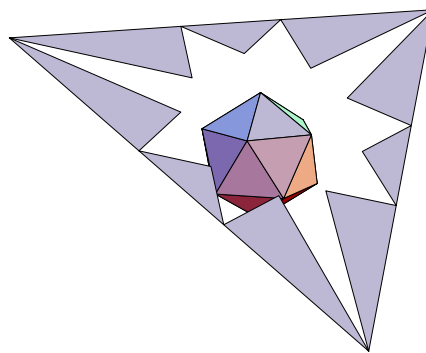
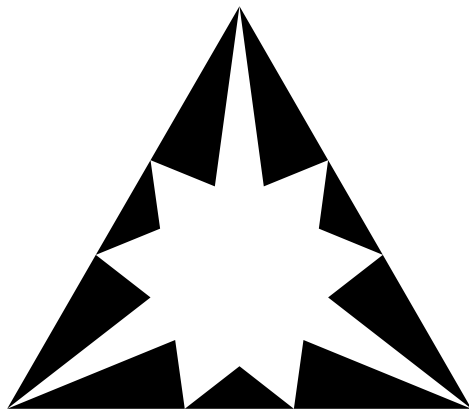
Diagram ozvezdenja dvajseterca

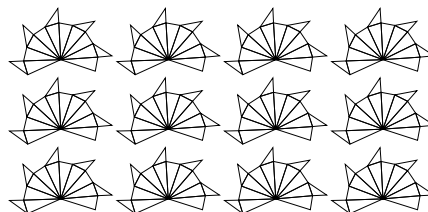
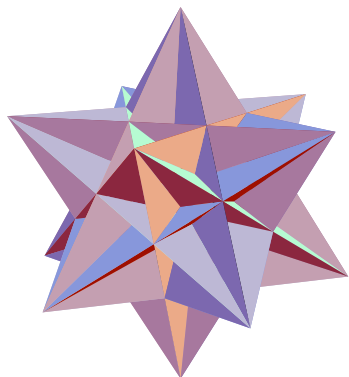


*Diagram ozvezdenja,
notranji del*

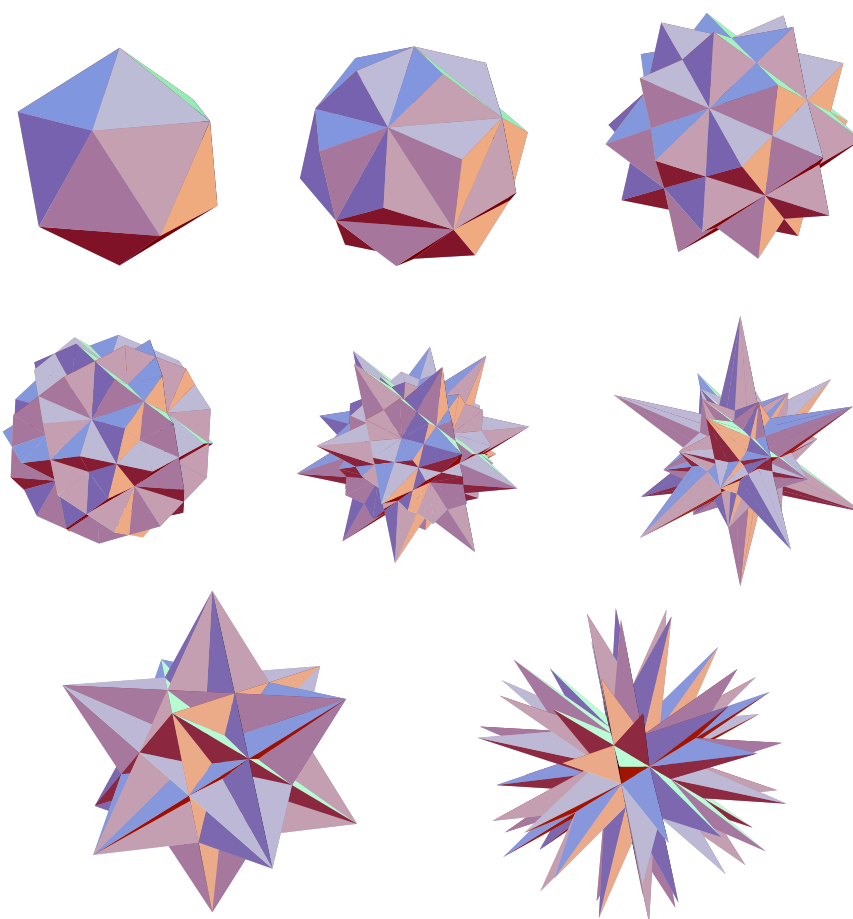
Oglejmo si primer velikega dvajseterca. Prva slika prikazuje del diagrama ozvezdenja, ki se nanaša na veliki dvajseterec. Na drugi sliki je diagram položen na eno mejno ploskev dvajseterca (moramo pa ga na vseh 20 ploskev).

Tretja slika prikazuje veliki ikozaeder, četrta pa mreže za izdelavo modela. Ko gledamo telo kot pravilen polieder, štejemo za njegove mejne ploskve 20 trikotnikov, ki se sekajo med seboj. Vidni del trikotnikov predstavlja diagram ozvezdenja. Ko pa moramo narediti mrežo, je telo sestavljeno iz 180 trikotnikov.

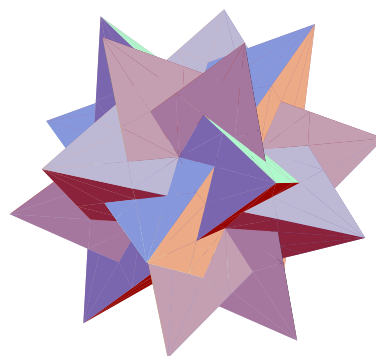
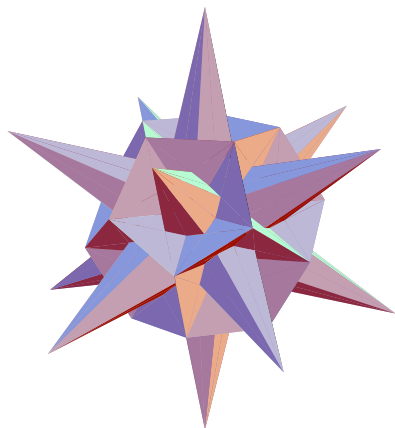
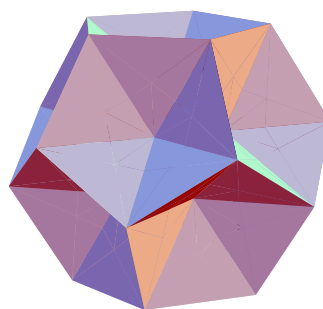
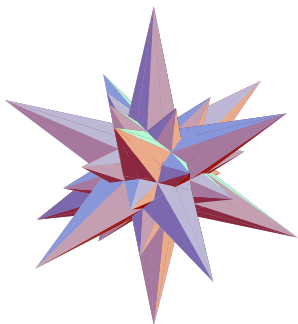
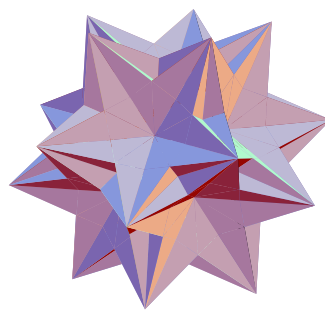
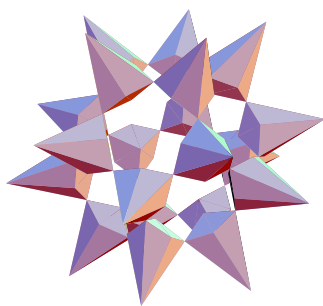


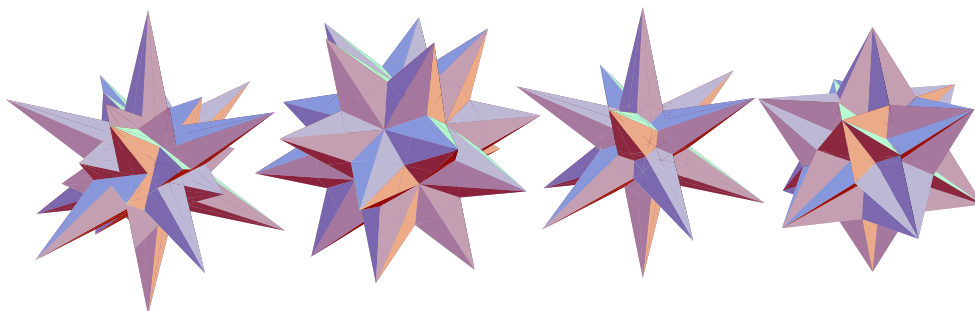


Naslednje slike prikazujejo glavno zaporedje.



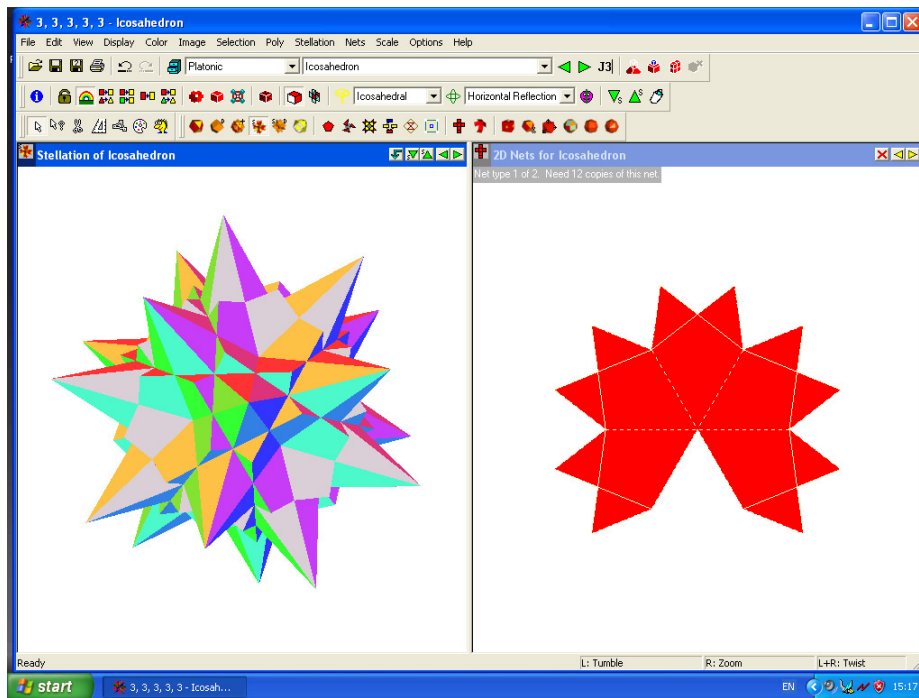
Naslednje slike prikazujejo ozvezdenje **e1** (deli so povezani le v ogliščih.), **Ef1**, **Ef2**, **Ef1g1**, **Fg1**, **Ef1f2**, **De1**, **De2f2**, **Fg2**.



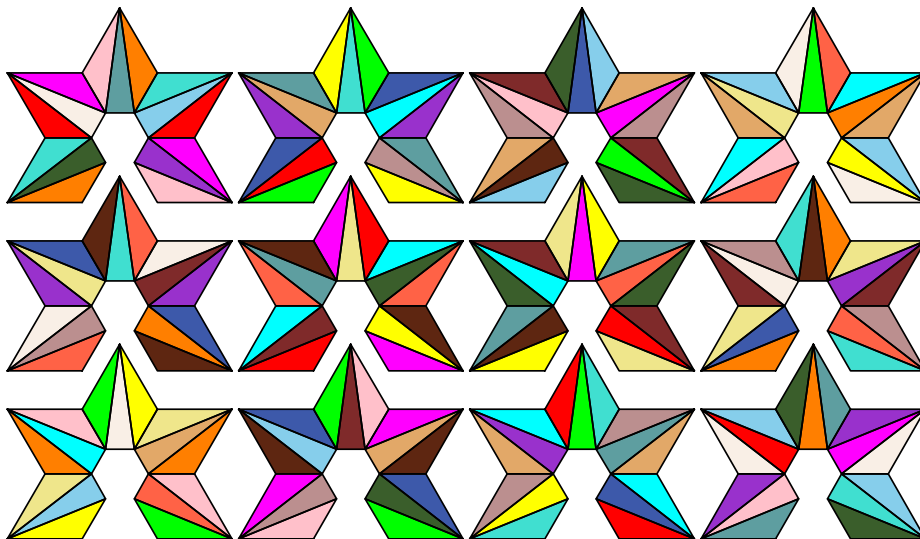


Izdelovanje modelov s pomočjo programa Great stella

Omenjeni program omogoča izdelavo modelov vseh poliedrov. Seveda se moramo zavedati, da nekonveksni poliedri v splošnem nimajo mreže v enem kosu. Izdelava optimalne mreže, to je mreže, ki zavzame čim večji del strani, je odprt problem. Modele ozvezdenj naredimo tako, da jih sestavimo iz več skladnih delov. Na sliki je zaslon programa, ki kaže ozvezenje in del mreže.



Mreže nato natisnemo in naredimo model. V naslednjih številkah revije bomo, tako kot smo tudi v preteklih, podali mreže večine ozvezdenj. Narejene so s pomočjo podatkov iz programa [4] v *Mathematici*. Prednost tega je, da lahko polieder pobarvamo, tako da so



deli, ki ležijo v isti ploskvi, pobarvani enako. Seveda za to potrebujemo 20 barv. Spodnja slika prikazuje mreže za izdelavo obarvanega popolnega dvajseterca.

Literatura

- [1] Cromwell, P.R., Polyhedra, Cambridge University Press, 1997.
- [2] Wenninger, M.J., Polyhedron Models, Cambridge University Press, 1971.
- [3] Webb, R. Great Stella Manual,
<http://www.software3d.com/StellaManual.php?prod=great>.
- [4] Maeder R, Mathematica Programmer.

Izidor Hafner