ŠOLA LOGIKE

O ŠTEVILU REŠITEV LOGIČNIH NALOG

1. V prejšnji številki revije smo reševali logične naloge, v katerih iščemo sestavljeno izjavo X, ki izpolnjuje določene pogoje. Tokrat se vprašajmo, kdaj ima naloga rešitev in koliko različnih rešitev ima.

Recimo, da imamo tri ljudi. Eden med njimi je resničnik (vedno govori resnico), drugi neresničnik (nikoli ne govori resnice) in tretji lažnivec (včasih govori resnico, včasih pa ne).

Uvedimo enostavne izjave z naslednjo tabelo:

	je resničnik	neresničnik	lažnivec
Prva oseba	A	B	$\neg A \wedge \neg B$
Druga oseba	C	D	$\neg C \wedge \neg D$
Tretja oseba	$\neg A \wedge \neg C$	$\neg B \wedge \neg D$	$(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

Torej izjava D govori, da je druga oseba neresničnik, izjava $\neg A \wedge \neg C$ pa, da je tretja oseba resničnik, saj je tretja oseba resničnik samo v primeru, ko nobeden od prvih dveh ni.

Ostali pogoji so še:

(1)$A \vee B \vee C \vee D$	(1') $\neg C \wedge \neg D \Rightarrow A \vee B$	(1") $\neg A \wedge \neg B \Rightarrow C \vee D$
(2) $A \Rightarrow \neg B$	(2') $B \Rightarrow \neg A$	
(3) $A \Rightarrow \neg C$	(3') $C \Rightarrow \neg A$	
(4) $B \Rightarrow \neg D$	(4') $D \Rightarrow \neg B$	
(5) $C \Rightarrow \neg D$	(5') $D \Rightarrow \neg C$	

Vaja: Prepričaj se, da velja $(1) \sim (1') \sim (1'')$, $(i) \sim (i')$, i=2,3,4,5, kjer $P \sim Q$ pomeni, da je izjava P logično ekvivalentna izjavi Q.

Naloga se glasi takole: Ali lahko z enim vprašanjem:" Ali velja X?", postavljenem prvi osebi, dosežemo:
- če je odgovor "da", potem druga oseba ni lažnivec;
- če je odgovor "ne", potem tretja oseba ni lažnivec.

Iščemo tako sestavljeno izjavo X, da bosta obe sledeči množici izjav protislovni:
(a) $\{(1)-(5), A \Rightarrow X\,, B \Rightarrow \neg X\,, \neg C \wedge \neg D\}$
(b) $\{(1)-(5), A \Rightarrow \neg X\,, B \Rightarrow X\,, (A \vee B) \wedge (C \vee D)\}$

Zapišimo semantični drevesi, ki jim zbrišemo vse sestavljene izjave razen negiranih enostavnih izjav ter vse veje, ki vsebujejo protislovje. (Glej Logika št. 4 str. 37)

$\neg C$	
$\neg D$	
A	B
$\neg B$	$\neg A$
X	$\neg X$

A	B
$\neg B$	$\neg A$
D	C
$\neg C$	$\neg D$
$\neg X$	X

Pogoji, da zapremo še te štiri veje, so
$X \Rightarrow \neg A \vee B \vee C \vee D$
$\neg X \Rightarrow A \vee \neg B \vee C \vee D$ oziroma $\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D \Rightarrow X$
$\neg X \Rightarrow \neg A \vee B \vee C \vee \neg D$ oziroma $A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D \Rightarrow X$
$X \Rightarrow A \vee \neg B \vee \neg C \vee D$

Skupaj se pogoj glasi
$(\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \Rightarrow X \Rightarrow$
$(\neg A \vee B \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C \vee D)$

2. Pogoj ima torej obliko:
$P \Rightarrow X \Rightarrow Q$ (To je okrajšava za $P \Rightarrow X$ in $X \Rightarrow Q$.)
Zato mora veljati $P \Rightarrow Q$. Če je $P \sim Q$, imamo eno samo rešitev, drugače pa sta $X_1 \equiv P$ in $X_2 \equiv Q$ že dve različni rešitvi.

Kdaj bo veljalo $P \Rightarrow Q$? Izjavi P in Q imata posebni obliki. Za prvo pravimo, da je v *normalni disjunktivni obliki*, druga pa v *normalni konjunktivni obliki*. Ali lahko uganeš, kakšna je posebnost obeh oblik?

Kdaj je izjava P resnična? Imamo dve možnosti: da so resnične izjave $\neg A$, B,$\neg C$ in $\neg D$ ali, da so resnične izjave A, $\neg B$, $\neg C$ in D. Kdaj je izjava Q neresnična? Če so neresnične vse izjave $\neg A$, B, C in A ali če so neresnične izjave A, $\neg B$, $\neg C$ in D.

Ali je lahko izjava P resnična, Q pa ne? Recimo, da je P resnična. Ena možnost je, da so resnične izjave $\neg A$, B, $\neg C$ in $\neg D$, toda potem niso neresnične vse izjave $\neg A$, B, C, D (zaradi resničnosti $\neg A$ in B) niti niso neresnične vse izjave A, $\neg B$, $\neg C$, D (zaradi $\neg C$). Druga možnost je resničnost izjav A, $\neg B$, $\neg C$ in D. Tudi tokrat je Q resnična izjava. Zakaj?

Torej res velja $P \Rightarrow Q$.

Zapišimo vseh 16 možnosti za izbiro med izjavo in njeno negacijo:

1.	A	B	C	D	9.	$\neg A$	B	C	D
2.	A	B	C	$\neg D$	10.	$\neg A$	B	C	$\neg D$
3.	A	B	$\neg C$	D	11.	$\neg A$	B	$\neg C$	D
4.	A	B	$\neg C$	$\neg D$	12.	$\neg A$	B	$\neg C$	$\neg D$
5.	A	$\neg B$	C	D	13.	$\neg A$	$\neg B$	C	D
6.	A	$\neg B$	C	$\neg D$	14.	$\neg A$	$\neg B$	C	$\neg D$
7.	A	$\neg B$	$\neg C$	D	15.	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	D
8.	A	$\neg B$	$\neg C$	$\neg D$	16.	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg D$

Pogoj $P \Rightarrow X$ zahteva, da vključimo v izjavo X, če jo zapišemo v disjunktivni normalni obliki, vrstici 7 in 12. Pogoj $X \Rightarrow Q$ pa prepoveduje vključitev vrstic:
8. A $\neg B$ $\neg C$ $\neg D$ (negirane izjave $\neg A$, B, C, D)
10.$\neg A$ B C $\neg D$(negirane izjave A, $\neg B$, $\neg C$, D) V izjavo X lahko vključimo razen obveznih vrstic 7 in 12 katerokoli drugo množico vrstic, ki ne vključuje ne 8. ne 12. vrstice. Teh vrstic je 12. Torej je 2^{12} logično različnih rešitev. Rešitev pa je znatno manj, če upoštevamo ekvivalenco pri pogojih (1) – (5).

3. Zgradimo še drevo, tako da začnemo s pogoji (1) - (5).

A	B	C	D
B	A	A	B
C	D	D	C
$D \mid \neg D$	$C \mid \neg C$	$B \mid \neg B$	$A \mid \neg A$
7 8	10 12	10 14	7 15

ki jih dopolnimo še s pogoji $D \vee \neg D$, $C \vee \neg C$, $B \vee \neg B$, $A \vee \neg A$. Če so izpolnjeni osnovni pogoji, imamo šest možnosti, ki jih zaznamujemo s številkami kot v spisku vseh možnosti. Vsaka možnost je konjunkcija enostavnih izjav ali njihovih negacij. Pogoj naloge pa je disjunkcija teh možnosti, ki jo bomo identificirali z množico

$P = \{7, 8, 10, 12, 14, 15\}$

Vzemimo dve rešitvi X_1 in X_2, ki ju spet identificiramo z ustreznimi množicami. Kdaj bo $P \Rightarrow (X_1 \Leftrightarrow X_2)$? Veljati mora

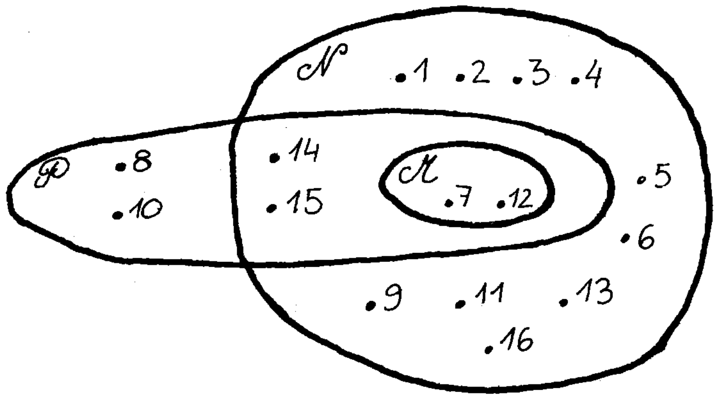
$P \wedge X_1 \Rightarrow X_2$ in $P \wedge X_2 \Rightarrow X_1$

V terminologiji teorije množic pa to pomeni

$P \cap X_1 \subseteq X_2$ in $P \cap X_2 \subseteq X_1$,

saj je pogoj za resničnost izjave $P \wedge X_1$, da je možnost vzeta iz preseka in ta mora biti tudi v X_2. Podobno velja za drugi pogoj.

Narišimo še diagram, kjer je osnovna množica množica vseh možnosti.



Množica $M = \{7, 12\}$ mora biti vključena v vse rešitve, možnosti 8 in 10 pa ne smeta biti vključeni. Koliko je rešitev, ki so pri pogoju P ekvivalentne rešitvi $X_1 = \{7, 12\}$? Ker je $X_1 \subseteq P$ in $P \cap X_2 \subseteq X_1$, X_2 ne sme vključevati ne 14 ne 15, lahko pa katerokoli podmnožico od $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 13, 16\}$ in še M. Zato imamo 2^{10} rešitev, ki so ekvivalentne X_1. Podoben premislek pove, da imamo le štiri neekvivalentne rešitve. Razen X_1 so to še

$X_2 = \{7, 12, 14\}$

$X_3 = \{7, 12, 15\}$

$X_4 = \{7, 12, 14, 15\}$

4. Še enkrat se ozrimo na tabelo vseh možnosti in na semantično drevo. Vrstici 7 in 12 nastopata na vejah, kjer je X, vrstici 8 in 10 pa na vejah, kjer je $\neg X$. Potreben in zadosten pogoj za rešljivost je, da se vrstice, ki jih moramo vključiti, *izključujejo* z vrsticami, ki jih ne smemo vključiti.

V našem primeru so v vsaki veji nastopale vse enostavne izjave. To v splošnem ne drži. Vrstica, ki ji kakšna enostavna izjava manjka, "pokriva" vse vrstice, ki jih dobimo, ko upoštevamo različne možnosti za manjkajoče izjave. Da bi se dve množici, ki jih dobimo iz dveh "nepopolnih" vrstic izključevali, mora obstajati vsaj ena enostavna izjava, ki nastopa v eni vrstici, negacija te izjave pa v drugi vrstici. Za takšni dve množici izjav bomo rekli, da si *nasprotujeta*. Zapišimo zdaj izrek o rešljivosti:

Logična naloga ima rešitev, če in samo če vsaka odprta veja drevesa vsebuje X ali $\neg X$ in vsaka veja, v kateri je X, nasprotuje vsaki veji, ki vsebuje $\neg X$. Pri tem seveda ne upoštevamo nasprotovanj $\{X, \neg X\}$.

5. Vrnimo se k naši nalogi in si oglejmo nekaj rešitev. Dve sta

$X_1 \equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D)$

$X_2 \equiv (\neg A \vee B \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C \vee D)$

Kako čudno pa bi se glasilo vprašanje, če bi ga prevedli v pogovorni jezik? Poiščimo sedaj kakšno bolj enostavno rešitev.

Če v X_1 izpustimo kakšno enostavno izjavo, bo veljalo $X_1 \Rightarrow X_1'$, če izpustimo kakšno izjavo v X_2 pa $X_2' \Rightarrow X_2$. Kdaj bo $X_1' \Rightarrow X_2'$? Za vsako disjunkcijo v X_1' in vsako konjunkcijo v X_2' moramo najti skupno izjavo (zakaj ne nasprotne?). Zato lahko vzamemo

$X_1' \equiv (B \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge D)$

$X_2' \equiv (\neg A \vee D) \wedge (\neg C \vee D)$

Uporabimo še distribucijske zakone in dobimo:

$X_1' \equiv \neg C \wedge (B \vee D)$

$X_2' \equiv D \vee (\neg A \wedge \neg C)$

Kako torej postavimo vprašanje? Vprašamo prvega in pokažemo na drugega: Ali je res, da tale ni resničnik, eden od vaju pa je neresničnik? Drugo vprašanje: Ali je res, da je tale neresničnik ali pa je tretji resničnik?

Druga rešitev je kar v redu. Preverimo jo tako, da semantično drevo podaljšamo

z $D \mid \neg A$ namesto X
$\quad\;\; \mid \neg C$

in $\neg D$ namesto $\neg X$
$\;\; A \mid C$

Preverimo še s sklepanjem:

■ Recimo, da je prva oseba odgovorila "da".
■ ■ Recimo še, da je to resnica in
■ ■ ■ da drugi ni neresničnik.
■ ■ ■ Potem je tretji resničnik,
■ ■ ■ prva oseba pa lažnivec (ki je govoril resnico).
■ ■ ■ Potem pa je druga oseba neresničnik, kar je protislovje.
■ ■ Drugi je torej neresničnik.
■ Če je torej prvi govoril resnico, je drugi neresničnik in ni lažnivec.
■ ■ Zdaj pa vzemimo, da odgovor "da" ni pravilen.
■ ■ Potem drugi ni neresničnik in
■ ■ tretji ni resničnik.
■ ■ Seveda, tudi prvi ni resničnik (ker njegov odgovor ni pravilen).
■ ■ Drugi je torej resničnik.
■ Če je torej prvi lagal, je drugi resničnik in seveda ni lažnivec.
V vsakem primeru: Če je bil odgovor prvega "da", drugi ni lažnivec.
■ Recimo sedaj, da je bil odgovor "ne".
■ ■ Recimo še, da je to resnica.
■ ■ Potem drugi ni neresničnik in
■ ■ tretji ni resničnik.
■ ■ ■ Recimo, da je tretji lažnivec.
■ ■ ■ Tedaj je prvi resničnik in drugi neresničnik. To pa je protislovje.
■ ■ Tretja oseba ni lažnivec.
■ Če je odgovor "ne" pravilen, tretja oseba ni lažnivec.
■ ■ Recimo, da "ne" ni pravilen odgovor.
■ ■ Potem je drugi neresničnik ali pa tretji resničnik.
■ ■ ■ Recimo, da je tretji lažnivec.
■ ■ ■ Potem je drugi neresničnik. Sledi,
■ ■ ■ da je prvi resničnik. To je protislovje. Torej:
■ ■ Tretji ni lažnivec.
■ Če je torej odgovor "ne" nepravilen, tretji ni lažnivec.
Ne glede na to ali je "ne" pravilen ali nepravilen odgovor, tretja oseba ni lažnivec. Ponovimo še enkrat: če je prva oseba odgovorila "da", druga oseba ni lažnivec, če je bil odgovor "ne", pa tretja oseba ni lažnivec. S tem pa smo dokazali, kar je bilo treba.

NALOGE

1. Preveri z običajnim sklepanjem še rešitev
   $X_1 \equiv \neg C \wedge (B \vee D)$
2. Poišči še kakšno primerno vprašanje.
3. Našli smo nekoga, ki ni lažnivec: kako bi z dvema vprašanjema ugotovili, kdo je kaj?
4. Poišči vse izjave, za katere je množica
   $\{R \Rightarrow X, L \Rightarrow \neg X, R \Rightarrow \neg L, R \vee L\}$
   protislovna. Koliko rešitev si dobil? Koliko pa je različnih rešitev pri pogoju $R \Rightarrow \neg L$?
5. Poišči takšno izjavo X, da bo množica
   $\{S \Leftrightarrow X \neg (S \wedge P)\}$
   protislovna, množica $\{S \Leftrightarrow X\}$ pa ne.

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

1. KOLESARJENJE

Peter je zmagal na šolskem kolesarskem prvenstvu. 27 kilometrov je prevozil v eni uri in 42 minutah. Med celo tekmo je le na dveh postajah vzel kozarec osvežilne pijače (brez ustavljanja seveda). Obe postaji sta bili druga od druge oddaljeni 6 km, druga postaja je bliže cilju kot start. Petrova povprečna hitrost od starta do druge postaje, v km/h, je enaka razdalji v km med prvo postajo in ciljem, enako velja za povprečno hitrost med drugo postajo in ciljem ter razdaljo med startom in drugo postajo. Koliko je druga postaja oddaljena od starta?

2. NAVDUŠENI ZBIRALCI

Miha je včasih zbiral značke; kar zajeten album jih je imel. Ker pa se s tem ne ukvarja več, se je odločil, da jih razdeli med prijatelje, ki so še vedno navdušeni "značkarji". Ti so seveda pridno prihajali ponje; vsak dan sta prišla dva zbiralca več kot prejšnji dan in Miha je vsakemu dal po 10 značk manj kot tistim dan poprej. Tako je šlo do vključno petega dne, ko je Miha razdal še zadnjih, manj kot 100 značk, od skupno 1000 značk, kolikor jih je imel na začetku.

Koliko zbiralcev je povečalo svoje zbirke na račun Mihove?

3. SEDEMKA

Zamislim si število. Ga kvadriram. Kvadrat ponovno kvadriram in dobljeni rezultat pomnožim z začetnim številom. Dobim število s sedmimi ciframi, zadnja cifra je sedem.

Katero je začetno število?

4. ŠAHOVSKI TURNIR

Na šolski šahovski turnir se je prijavilo 24 tekmovalcev. Razvrstili so jih v dve skupini; v vsaki skupini je vsak igral eno igro z vsakim. V drugi skupini je bilo odigranih 69 partij več kot v prvi. Zmagovalec v prvi skupini si je priigral $5\frac{1}{2}$ točke in ni niti enkrat izgubil. Kolikokrat je zmagal, kolikokrat remiziral? (za zmago dobi igralec 1 točko, za remi pa 1/2).

5. POPRAVNI IZPITI

Aleš je opravljal popravni izpit iz geografije. Skupaj s sošolci je nestrpno čakal pred razredom, da profesorji končajo z razpravo in obesijo listek z uradnimi rezultati. Končno se vrata odprejo in skupina profesorjev stopi na hodnik. "O, Kovač, ti si pa naredil", se