Za Ba velja: (1) $x = 3z$
Za O velja: (2) $2x + 4y = 8z + v$
Za H velja: (3) $2x + 3y = 2v$
Za P velja: (4) $y = 2z$

Ta homogen sistem diofantskih enačb najlažje rešimo tako, da neznanki x in y, izraženi z neznanko z v enačbah (1) in (4), vstavimo v (2) in (3). Tako dobimo

(2') $6z + 8z = 8z + v$ in odtod $v = 6z$
(3') $6z + 6z = 2v$ in odtod $v = 6z$

Vidimo, da je ena od zadnji dveh enačb odveč, saj je izpeljiva iz ostalih. Če vzamemo $z = 1$, dobimo $x = 3$, $y = 2$, $v = 6$. Kemijska enačba se torej glasi:

$$3\,Ba(OH)_2 + 2\,H_3PO_4 \rightarrow Ba_3(PO_4)_2 + 6\,H_2O$$

(koeficienta 1 ne pišemo).

Kaj bi se zgodilo, če nobena enačba ne bi bila izpeljiva iz drugih? Matematično gledano bi imeli samo trivialno rešitev in nobene reakcije.

11. Poišči reakcijske koeficiente naslednjih reakcij:

(a) $PCl_3 + H_2O \rightarrow H_3PO_3 + HCl$
(b) $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO + H_2O$
(c) $Cu(NO_3)_2 + NaI \rightarrow CuI + I_2 + NaNO_3$
(č) $HCl + KMnO_4 + H_2C_2O_4 \rightarrow CO_2 + MnCl_2 + KCl + H_2O$

Odgovori (koeficienti po vrstnem redu snovi v enačbi):

(a) 1, 3, 1, 3
(b) 2, 5, 4, 6
(c) 2, 4, 2, 1, 4
(č) 6, 2, 5, 10, 2, 2, 8

[1] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1984.

[2] B. Čeh, *O urejanju kemijskih enačb nekoliko drugače*, Kemija v šoli, April 1993, str. 12–16.

Izidor Hafner

Psevdokemijske enačbe

Pri urejevanju kemijske enačbe, kakršna je npr.

$$FeS_2 + O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2$$

moramo določiti neznanke x, y, z in w v enačbi

$$x\,FeS_2 + y\,O_2 \rightarrow z\,Fe_2O_3 + w\,SO_2$$

tako, da bo število atomov posameznega elementa na levi in na desni enako. Pri tem moramo poiskati rešitev, v kateri nastopajo najmanjša naravna števila. Pogoji so

Fe: $x = 2z$
S: $2x = w$
O: $2y = 3z + 2w$

Druga enačba nam da w izražen z x, prva pa x izražen z z. Tako je $w = 4z$ in če gremo v tretjo enačbo, dobimo $2y = 3z + 8z = 11z$. Najmanjša rešitev je $z = 2$, $y = 11$, $w = 8$ in $x = 4$. Enačba reakcije se torej glasi:

$$4\,FeS_2 + 11\,O_2 \rightarrow 2\,Fe_2O_3 + 8\,SO_2$$

Da ne bi bili preveč vezani na kemijo, predpostavimo, da imamo elemente: A, B, C, D, E..., ki tvorijo spojine, mi pa moramo urediti enačbe, ki jih bomo zapisali kar z enakostjo.

1. Uredi enačbo

$$A_7B_6C_2 + C_2 = AC_2 + B_2C$$

Rešitev: Iščemo naravna števila x, y, z in w, tako da bo izpolnjena enačba:

$$x\,A_7B_6C_2 + y\,C_2 = z\,AC_2 + w\,B_2C$$

Izenačimo število atomov posameznih elementov na levi in na desni:

A: $7x = z$
B: $6x = 2w$
C: $2x + 2y = 2z + w$

Iz druge enačbe je $w = 3x$. Vstavimo to in z iz prve enačbe v tretjo $2x + 2y = 14x + 3x$ pa dobimo $2y = 15x$. Rešitev je $x = 2$, $y = 15$, $z = 14$ in $w = 6$. Enačba reakcije se glasi:

$$2\,A_7B_6C_2 + 15\,C_2 = 14\,AC_2 + 6\,B_2C$$

2. Uredi enačbo

$$A_3(BC_4)_2 + DC_2 + E = ADC_3 + EC + B_4$$

Odgovor: $2\,A_3(BC_4)_2 + 6\,DC_2 + 10\,E = 6\,ADC_3 + 10\,EC + B_4$

3. Uredi enačbe:
   (a) $A_{10}B_8 + C_2 = A_8B_4C_3 + AC_2 + B_2C$
   (b) $AB(CD)_2 + AEF = B + ACD + E_2 + F_2E$
   (c) $A_4B_{10} + C_2B = C_3AB_4$
   (d) $AB + ACD + EB_2 = EB_3 + CD + A_2D$
   (e) $AB + CDE_4 + A_2F_2E_4 = FE_2 + DB_2 + CB + A_2E$

   Odgovori:
   (a) $2\,A_{10}B_8 + 9\,C_2 = 2\,A_8B_4C_3 + 4\,AC_2 + 4\,B_2C$
   (b) $4\,AB(CD)_2 + 4\,AEF = 4\,B + 8\,ACD + E_2 + 2\,F_2E$
   (c) $A_4B_{10} + 6\,C_2B = 4\,C_3AB_4$
   (d) $3\,AB + ACD + 3\,EB_2 = 3\,EB_3 + CD + 2\,A_2D$
   (e) $6\,AB + 2\,CDE_4 + 5\,A_2F_2E_4 = 10\,FE_2 + 2\,DB_2 + 2\,CB + 8\,A_2E$

4. Reši enačbo:
   $$x\,ABC_2 + y\,C_3DB_4 = z\,A_3D_2B_8 + w\,C_aB_b$$
   Rešitev:
   A: $x = 3z$
   B: $x + 4y = 8z + bw$
   C: $2x + 3y = aw$
   D: $y = 2z$
   Izrazimo x iz enačbe A in y iz D ter ju vstavimo v enačbi B in C:
   $3z + 8z = 8z + bw$
   $6x + 6z = aw$
   Sledi $3z = bw$, $12z = aw$ in $a = 4b$.
   Rezultat: $b = 1$, $a = 4$, $w = 3$, $z = 1$, $x = 3$ in $y = 2$.

5. Reši enačbe:
   (a) $x\,ABC + y\,C_3DB_4 = z\,A_3DB_4 + w\,C_aB_b$
   (b) $x\,AB_3 + y\,C_2 = z\,AC + w\,B_aC_b$
   (c) $x\,A_3B_8 + y\,C_2 = z\,AB + w\,B_aC_b$

   Odgovori:
   (a) $3\,ABC + C_3DB_4 = A_3DB_4 + 3\,C_2B$
   (b) $4\,AB_3 + 5\,C_2 = 4\,AC + 6\,B_2C$
   (c) $2\,A_3B_8 + 7\,C_2 = 6\,AB + 8\,B_2C$

6. Lahko pa se zgodi, da enačba nima rešitev v množici naravnih števil:
   $$x\,A + y\,B_2CD_4 = z\,A(CD_4)_3 + w\,B_2D$$
   A: $x = 2z$
   B: $2y = 2w$
   C: $y = 3z$

   D: $4y = 12z + w$
   Vstavimo y iz C v B in D in dobimo $6z = 2w$ in $12z = 12z + w$. Sistem reši samo trivialna rešitev, ko so vse neznanke 0.

7. Uporabimo še Gaussov postopek eliminacije.
   $$x\,AB_2C_5D_6 + y\,A_2BC = z\,A_2C_4D_2 + w\,B_3CD_3$$
   Sistem se glasi:
   A: $x + 2y = 2z$
   B: $2x + y = 3w$
   C: $5x + y = 4z + w$
   D: $6x = 2z + 4w$
   Koeficiente enačbe bomo zapisali v obliki pravokotne (kvadratne) sheme, ki ji pravimo *matrika*.

$$\begin{array}{cccccc} & x & y & & z & w \\ A & 1 & 2 & = & 2 & 0 \\ B & 2 & 1 & = & 0 & 3 \\ C & 5 & 1 & = & 4 & 1 \\ D & 6 & 0 & = & 2 & 4 \end{array}$$

Prvo enačbo bomo prepisali, nato bomo k drugi dodali z -2 pomnoženo prvo enačbo, potem k tretji enačbi dodamo z -5 pomnoženo prvo enačbo in k četrti enačbi z -6 pomnoženo prvo enačbo. Tako dobimo novo matriko

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & = & 2 & 0 \\ 0 & -3 & = & -4 & 3 \\ 0 & -9 & = & -6 & 1 \\ 0 & -12 & = & -10 & 4 \end{array}$$

Tako smo eliminirali x iz vseh enačb razen iz prve. Zdaj prepišimo prvo enačbo, drugo pa pomnožimo z -1 in jo prepišimo. Nato pomnožimo drugo s 3 in jo dodajmo k tretji, potem pa pomnožimo drugo s 4 in jo dodajmo k četrti enačbi. Tako smo odstranili y iz tretje in četrte enačbe:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & = & 2 & 0 \\ 0 & 3 & = & 4 & -3 \\ 0 & 0 & = & 6 & -8 \\ 0 & 0 & = & 6 & -8 \end{array}$$

Zdaj dodamo k 4. enačbi z -1 pomnoženo 3. enačbo in dobimo:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & = & 2 & 0 \\ 0 & 3 & = & 4 & -3 \\ 0 & 0 & = & 6 & -8 \\ 0 & 0 & = & 0 & 0 \end{array}$$

To, da smo dobili vrstico iz samih ničel, pomeni, da je bila četrta enačba odvisna od prvih treh in tako odveč. To pa nam tudi zagotavlja netrivialno rešitev, saj imamo samo tri neodvisne enačbe in štiri neznanke.

Tretja vrstica nam pomeni enačbo $8w = 6z$ ali $4w = 3z$. Najmanjša rešitev v naravnih številih je $z = 4$, $w = 3$. Vse naravne rešitve pa dajeta izraza $z = 4t$, $w = 3t$, kjer t preteče vsa naravna števila.

Iz druge enačbe dobimo $y = \frac{7t}{3}$. Zato mora biti $t = 3k$, kjer k preteče vsa naravna števila.

Najmanjša rešitev je za $k = 1$: $t = 3$, $z = 12$, $w = 9$, $y = 7$. Iz prve enačbe dobimo $x = 2z - 2y = 10$.

Odgovor: $10\,AB_2C_5D_6 + 7\,A_2BC = 12\,A_2C_4D_2 + 9\,B_3CD_3$

Izidor Hafner

Razpis 6. državnega tekmovanja iz razvedrilne matematike

Letošnje tekmovanje bo potekalo v soboto, 2. septembra na *Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo* v Ljubljani. Tekmovalce bomo izbrali med reševalci rubrike *Tekmujmo v razvedrilni matematiki*. Rešitve nalog morate poslati do 5. 8. 95 na naslov uredništva:

Logika d.o.o.
Svetčeva 11
61240 Kamnik

s pripisom "**Za tekmovanje**". Vsak tekmovalec mora pripisati tudi skupino, v kateri bo tekmoval, to je razred, v katerega bo hodil jeseni. Tekmujejo učenci od 5. razreda naprej, dijaki, študenti in odrasli. O uvrstitvi na tekmovanje boste pisno obveščeni do 20. 8. 95.

Prvih pet tekmovalcev iz vsake skupine na (lanskem) 5. državnem tekmovanju, se uvrsti na tekmovanje tako, da pošljejo rešitev ene naloge skupaj s prijavo za tekmovanje. Isto velja za udeležence razpisa Nagradne logične naloge in IMTS-ja.

Študenti, člani komisij za pregled nalog, sporočijo le podatek, ali želijo sodelovati tudi pri reševanju nalog.

Tekmujmo v razvedrilni matematiki

1. Reši številsko križanko

1	2		3
4			
		5	
6			

Vodoravno
1. $2N \times 4V$ (2 navpično krat 4 vodoravno)
4. $5N \times 2$
5. $5N + 2$
6. $1V - 20$

Navpično
1. Večkratnik števila 9
2. Glej $1V$
3. Palindrom (število, ki je enako svojemu obratu)
5. Kub

2. Reši kriptaritme. Pri tem moraš za različne črke najti različne števke, tako da bodo izpolnjene enačbe.

a) $30(UGH) + HUGE + UGLY = BUGS$
b) $PEEP \times PEEP = DUCKLING$
c) $FIRST + THREE + HORSES = TRIPLE$
d) $LION + ON + THE = PROWL$, kjer je IT liho število.
e) $ROOT + ROOT + ROOT = PIGS$, kjer $PIGS$ vsebuje tri zaporedne lihe števke.
f) $TRAP + RATS + STAN + IN + RAT = TRAPS$, kjer je $TRAPS$ praštevilo.
g) $MICE + MICE + RATS = PESTS$, kjer bo $RATS$ največje možno število.
h) Kaj daje tale zvok: $CALM + BAA + BAA = 2395$? Vsota tega kriptaritma bo povedala odgovor.
i) $LETS + REALLY + TALK = TURKEY$, kjer je $TURKEY$ liho število.
j) $TEN_{10} = NINE_9 + 1$, kjer je 1 ponovno uporabljena.
k) $SIX_6 = FIVE_5$. Poišči najmanjšo rešitev.
l) $NACL + KCL + LICL = SALT$. Ta zmes kloridov tvori največjo količino soli.
m) $TIS + JINGLE + BELLS + AGAIN = LISTEN$, kjer je $BELLS$ liho število.
n) $REIN + DEER + IS + RED = NOSED$, kjer je RED praštevilo.
o) $MERRY = XMAS + FROM + JRM$, kjer je $MERRY$ največje.
p) $I + GO + ON + ONEHORSE + OPEN = SLEIGH$
r) $MERRY + XMAS = DODGE$, kjer je $XMAS$ praštevilo.
s) $RED + BLUE + GREEN = BROWN$, kjer je $BLUE$ kvadrat.
t) $BROWN + YELLOW = PURPLE$
u) $ONE \equiv 1 (\mathrm{mod}\ TWO)$
$ONE \equiv 1 (\mathrm{mod}\ SIX)$
$SIX \equiv 0 (\mathrm{mod}\ TWO)$
To je kriptaritmični sistem. $x \equiv y (\mathrm{mod}\ z)$ pomeni, da ima x ostanek y pri deljenju z z.

Naloge smo našli v knjigi *Index to Mathematical Problems 1980-1984*, ki jo je uredil Stanley Rabinowitz, izšla pa je pri *MathPro Press*.