

O najmanjšem številu lažnivcev

Nekaj ljudi je drug drugega obtoževalo z lažnivcem. To pomeni, da se ti ljudje občasno zlažejo. Če je oseba A obtožila osebo B, da je lažnivec, potem je B lažnivec, če je A resnicoljubna oseba. Če je B resnicoljubna, je lažnivec A. Če pa je A lažnivec, se lahko zgodi, da pove resnico in je tudi B lažnivec. Tokrat bomo imeli opravka z 9 ljudmi. Nekoč so se takole obtoževali ($\{A,B\}$ pomeni, da oseba A trdi, da je B lažnivec):

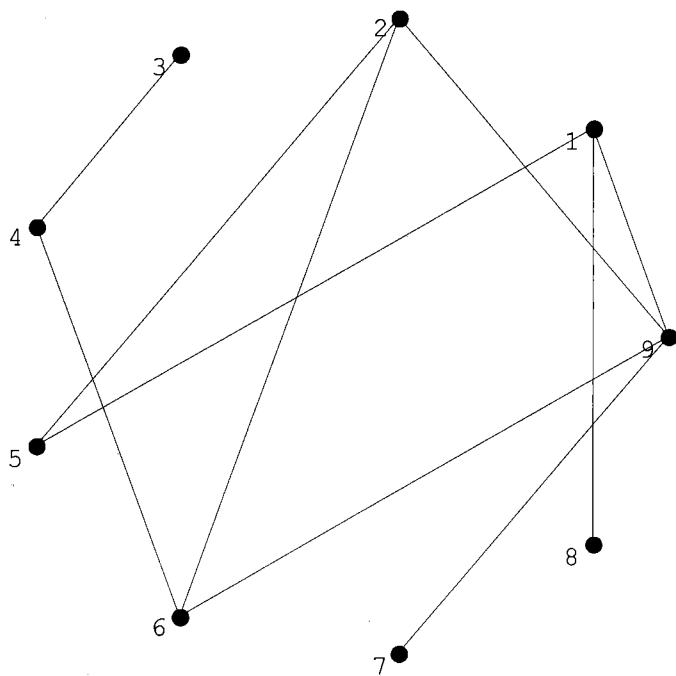
$\{Hani,Erika\}$, $\{Nina,Tina\}$, $\{Oton,Tina\}$, $\{Tina,Ana\}$, $\{Ana,Katra\}$, $\{Bob,Tina\}$, $\{Bob,Nina\}$, $\{Hani,Nina\}$, $\{Riko,Ana\}$, $\{Katra,Bob\}$.

Poišči najmanjše število lažnivcev, tako da bodo izpolnjeni pogoji naloge.

Rešitev:

Vsaki osebi priredimo zaporedno število po pravilu: Ana->1, Bob->2, Erika->3, Hani->4, Katra->5, Nina->6, Oton->7, Riko->8, Tina->9.

Tako dobimo graf:



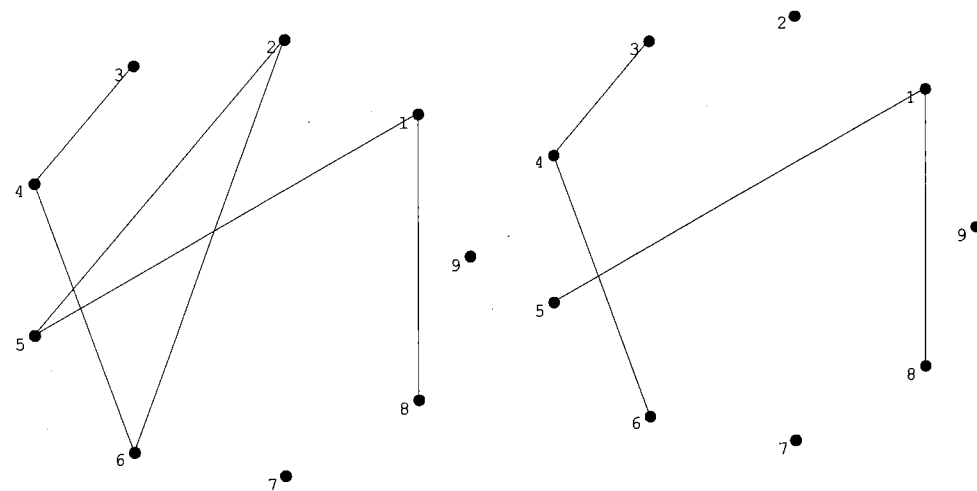
Množica, ki pokrije vse povezave, reši nalogo, če je številsko najmanjša. Minimalna množica točk, ki pokrije vse povezave, je množica točk, tako da v vsaki povezavi nastopa vsaj ena točka iz te množice. Nobena njena prava podmnožica pa te lastnosti nima. Pri

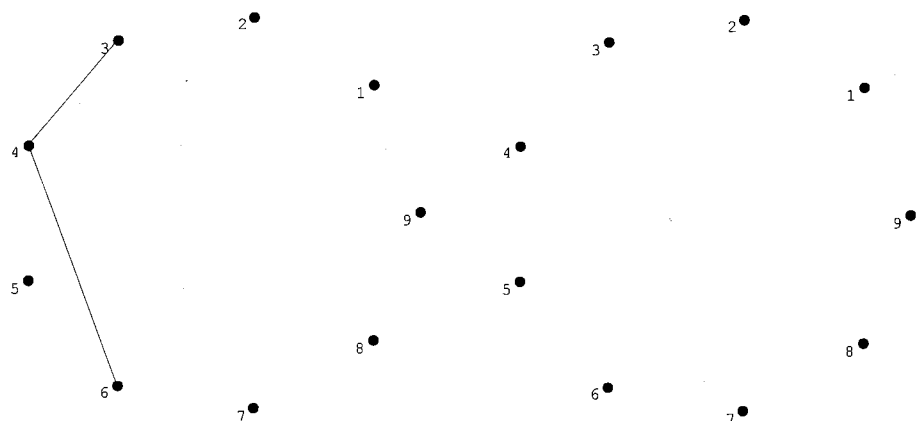
iskanju t.i. minimalnega pokritja upoštevamo najprej točke, ki nastopajo v čimvečjem številu povezav.

Postopek: Poiščemo osebo z največ povezavami. To je prva oseba iskane množice. Zbrišemo vse njene povezave. V ostanku poiščemo osebo z največ povezavami. To je druga oseba itn. Ta množica pokrije vse povezave (izjave), zato je ugodno predstaviti graf z matriko sosedstva:

1	{5, 8, 9}
2	{5, 6, 9}
3	{4}
4	{3, 6}
5	{1, 2}
6	{2, 4, 9}
7	{9}
8	{1}
9	{1, 2, 6, 7}

Zgornja matrika nam pove, da bomo najprej odstranili povezave z 9 (Tina). V naslednjem koraku imamo več možnosti. Odločili smo se za 2 (Bob). Nato nam ostaneta še 1 in 4 (Ana, Hani).





Rešitev: {Ana, Bob, Hani, Tina} pokrije vse povezave. Ali je tudi najmanjšestvilna?

Pojasnilo: Če neka oseba trdi, da je druga oseba lažnivec, potem bi tudi druga oseba za prvo trdila enako. Lahko rečemo, da osebi obtožujeta druga drugo. Če je tako, imamo vsaj enega lažnivca. Če pa se tri osebe obtožujejo, imamo vsaj dva lažnivca. En lažnivec pojasni dve izjavi, obtožbo drugih dveh pa pojasni še en lažnivec med tema. Podobno je, če imamo 4 osebe, ki obtožujejo druga drugo. En lažnivec pojasni tri izjave, tri preostale pa pojasnita še dva lažnivca med ostalimi tremi. Splošno: če se n oseb obtožuje (vsak vse druge) je med njimi vsaj $n-1$ lažnivcev.

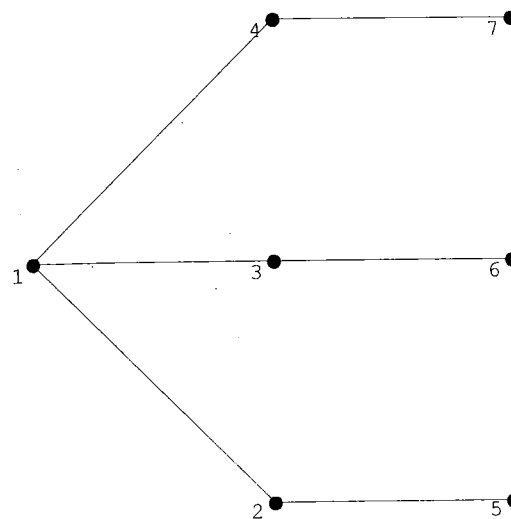
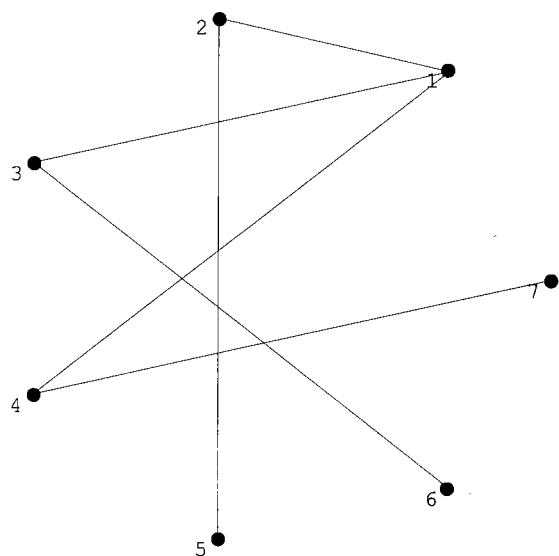
Tokrat imamo naslednje neprekrivajoče se množice, v katerih osebe druga drugo obtožujejo: $\{2,6,9\}, \{3,4\}, \{1,5\}$. To je podmnožica vseh povezav. Vendar potrebujemo za pokritje že te množice 4 točke.

Zadnje nam pove, da mora biti število lažnivcev vsaj 4. Ker se to ujema s številom elementov množice iz prvega dela, je to res optimalno (ni pa edina rešitev).

Zakaj moramo, potem ko smo našli množico, ki pokrije vse povezave, dokazati, da je po številu najmanjša? Zato, ker množica, ki pokrije vse povezave, ni nujno najmanjša. Tudi množica vseh točk pokrije vse povezave.

V resnici postopek, ki smo ga uporabili ne da vedno najmanjše množice (čeprav jo v večini primerov da).

Vzemimo graf (isti na obeh slikah):



Po našem postopku bi najprej vzeli točko 1. Toda zdaj nam ostanejo tri povezave in zanje moramo vzeti po eno točko iz vsake od povezav, npr. 5, 6, 7. Množica $\{1,5,6,7\}$ je minimalna množica, ki pokrije vse povezave, v smislu, da nobena njena prava podmnožica ne pokrije vseh povezav. Toda $\{1,2,3,4\}$ ni minimalna množica, saj že $\{2,3,4\}$ pokrije vse povezave. Zgornji heuristični postopek, čeprav največkrat da pravi rezultat, v splošnem ni pravilen. Zato se moramo prepričati, da je dobljena množica res najmanjša po številu elementov.

Nalogo tega tipa smo odkrili v knjigi *D. Shasha, Doctor Ecco's Cyberpuzzles*, str. 200.

Naloge

V spodnjih nalogah bomo našli le medsebojna obtoževanja. Poišči najmanjše število lažnivcev, tako da bodo izpolnjeni pogoji naloge.

- $\{Nina, Lan\}, \{Gita, Oton\}, \{Oton, Lan\}, \{Lan, Jan\}, \{Bob, Lan\}, \{Oton, Bob\}, \{Iztok, Gita\}, \{Oton, Iztok\}, \{Nina, Oton\}, \{Iztok, Bob\}, \{Sašo, Gita\}, \{Jan, Iztok\}, \{Oton, Jan\}, \{Sašo, Oton\}, \{Ana, Gita\}, \{Jan, Ana\}, \{Nina, Gita\}, \{Nina, Iztok\}, \{Nina, Bob\}$.
- $\{Erika, Hani\}, \{Fani, Hani\}, \{Manca, Katra\}, \{Katra, Erika\}, \{Urša, Katra\}, \{Riko, Jan\}, \{Manca, Riko\}, \{Erika, Manca\}, \{Urša, Manca\}, \{Erika, Urša\}, \{Riko, Bob\}, \{Jan, Bob\}, \{Hani, Jan\}, \{Fani, Riko\}, \{Jan, Manca\}$.
- $\{Riko, Dane\}, \{Iztok, Dane\}, \{Dane, Nina\}, \{Fani, Iztok\}, \{Cene, Fani\}, \{Dane, Erika\}, \{Hani, Iztok\}, \{Erika, Hani\}, \{Ana, Erika\}, \{Ana, Cene\}, \{Ana, Riko\}, \{Erika, Iztok\}, \{Riko, Pino\}, \{Iztok, Ana\}, \{Oton, Riko\}, \{Hani, Pino\}, \{Erika, Fani\}, \{Riko, Fani\}, \{Iztok, Pino\}, \{Hani, Cene\}$.
- $\{Ana, Lan\}, \{Fani, Jan\}, \{Fani, Bob\}, \{Ana, Jan\}, \{Fani, Iztok\}, \{Pino, Lan\}, \{Lan, Fani\}, \{Jan, Pino\}, \{Ana, Bob\}, \{Bob, Pino\}, \{Fani, Pino\}, \{Bob, Iztok\}$.

5. {Tina,Manca}, {Sašo,Lan}, {Sašo,Dane}, {Manca,Dane}, {Riko,Sašo}, {Ana,Manca}, {Dane,Riko}, {Sašo,Tina}, {Riko,Ana}.
6. {Gita,Nina}, {Katra,Cene}, {Bob,Katra}, {Cene,Nina}, {Cene,Fani}, {Dane,Fani}, {Fani,Nina}, {Jan,Fani}, {Gita,Fani}.
7. {Lan,Bob}, {Fani,Iztok}, {Fani,Nina}, {Iztok,Nina}, {Pino,Bob}, {Fani,Riko}, {Nina,Bob}, {Vika,Bob}, {Lan,Vika}, {Iztok,Pino}, {Cene,Iztok}, {Lan,Cene}, {Fani,Vika}, {Fani,Pino}, {Pino,Vika}, {Iztok,Bob}.
8. {Katra,Ana}, {Tina,Urša}, {Gita,Iztok}, {Vika,Riko}, {Ana,Jan}, {Lan,Erika}, {Bob,Erika}, {Vika,Fani}, {Lan,Gita}, {Cene,Lan}, {Fani,Riko}, {Urša,Fani}, {Tina,Iztok}, {Tina,Katra}, {Bob,Cene}, {Lan,Jan}, {Cene,Vika}, {Ana,Erika}, {Katra,Iztok}, {Urša,Erika}, {Tina,Lan}, {Riko,Cene}, {Katra,Urša}, {Urša,Lan}, {Ana,Iztok}, {Vika,Ana}, {Ana,Tina}, {Vika,Iztok}, {Fani,Gita}, {Lan,Katra}, {Riko,Gita}, {Cene,Gita}, {Tina,Cene}, {Erika,Cene}, {Katra,Erika}, {Gita,Jan}, {Fani,Cene}, {Vika,Lan}, {Cene,Katra}, {Lan,Riko}, {Jan,Katra}.
9. {Urša,Fani}, {Cene,Ana}, {Pino,Iztok}, {Urša,Gita}, {Cene,Gita}, {Nina,Sašo}, {Katra,Dane}, {Gita,Tina}, {Ana,Dane}, {Nina,Iztok}, {Urša,Bob}, {Fani,Tina}, {Ana,Lan}, {Nina,Bob}, {Dane,Iztok}, {Lan,Bob}, {Lan,Fani}, {Nina,Katra}, {Gita,Iztok}, {Katra,Iztok}, {Ana,Iztok}, {Tina,Iztok}, {Ana,Tina}, {Dane,Cene}, {Tina,Cene}, {Dane,Tina}, {Fani,Dane}, {Fani,Sašo}, {Gita,Bob}, {Gita,Dane}, {Dane,Lan}, {Fani,Bob}, {Katra,Gita}, {Nina,Pino}, {Katra,Pino}, {Tina,Urša}, {Pino,Urša}, {Sašo,Gita}, {Fani,Iztok}, {Dane,Urša}.
10. {Gita,Hani}, {Sašo,Ana}, {Sašo,Vika}, {Gita,Tina}, {Urša,Cene}, {Nina,Cene}, {Fani,Hani}, {Nina,Bob}, {Hani,Urša}, {Katra,Pino}, {Katra,Nina}, {Hani,Manca}, {Cene,Bob}, {Jan,Cene}, {Nina,Lan}, {Bob,Katra}, {Katra,Urša}, {Pino,Tina}, {Manca,Tina}, {Bob,Urša}, {Manca,Fani}, {Jan,Bob}, {Lan,Ana}, {Hani,Oton}, {Urša,Oton}, {Jan,Urša}, {Vika,Tina}, {Sašo,Hani}, {Lan,Pino}, {Jan,Ana}, {Katra,Hani}, {Hani,Pino}, {Bob,Sašo}, {Bob,Hani}, {Oton,Gita}, {Lan,Vika}, {Ana,Fani}, {Bob,Lan}, {Pino,Cene}, {Jan,Nina}, {Pino,Vika}, {Vika,Jan}, {Tina,Cene}, {Hani,Jan}, {Pino,Oton}, {Sašo,Cene}, {Jan,Pino}, {Pino,Nina}, {Oton,Tina}, {Katra,Gita}, {Oton,Bob}, {Oton,Jan}, {Sašo,Lan}, {Sašo,Manca}, {Tina,Ana}, {Tina,Lan}, {Urša,Vika}, {Gita,Lan}, {Bob,Manca}, {Lan,Katra}, {Bob,Tina}.

11. {Urša,Pino}, {Vika,Fani}, {Oton,Dane}, {Pino,Manca}, {Sašo,Urša}, {Pino,Fani}, {Vika,Lan}, {Oton,Hani}, {Hani,Fani}, {Jan,Dane}, {Sašo,Dane}, {Dane,Hani}, {Iztok,Lan}, {Iztok,Cene}, {Vika,Nina}, {Ana,Iztok}, {Oton,Urša}, {Vika,Urša}, {Sašo,Pino}, {Katra,Ana}, {Fani,Jan}, {Iztok,Manca}, {Sašo,Manca}, {Pino,Jan}, {Nina,Katra}, {Ana,Lan}, {Vika,Iztok}, {Pino,Oton}, {Dane,Fani}, {Jan,Nina}, {Katra,Dane}, {Cene,Pino}, {Sašo,Iztok}, {Manca,Katra}, {Lan,Katra}, {Nina,Manca}, {Katra,Hani}, {Cene,Urša}, {Oton,Manca}, {Cene,Hani}, {Vika,Katra}, {Katra,Urša}, {Vika,Manca}, {Ana,Fani}, {Sašo,Lan}, {Fani,Sašo}, {Jan,Katra}, {Urša,Jan}, {Jan,Vika}, {Nina,Lan}.
12. {Oton,Bob}, {Cene,Bob}, {Urša,Erika}, {Manca,Katra}, {Riko,Cene}, {Tina,Gita}, {Oton,Cene}, {Vika,Oton}, {Katra,Oton}, {Gita,Manca}, {Riko,Katra}, {Pino,Dane}, {Riko,Nina}, {Riko,Bob}, {Erika,Bob}, {Nina,Urša}, {Tina,Nina}, {Urša,Dane}, {Bob,Katra}, {Manca,Bob}, {Nina,Pino}, {Manca,Riko}, {Tina,Dane}, {Tina,Bob}, {Urša,Vika}, {Bob,Urša}, {Cene,Manca}, {Pino,Iztok}, {Gita,Riko}, {Manca,Nina}, {Dane,Katra}, {Vika,Erika}, {Pino,Bob}, {Katra,Urša}, {Gita,Katra}, {Erika,Dane}, {Pino,Erika}, {Riko,Tina}, {Vika,Bob}, {Dane,Iztok}, {Oton,Pino}.
13. {Bob,Pino}, {Katra,Oton}, {Oton,Jan}, {Riko,Tina}, {Urša,Sašo}, {Nina,Pino}, {Vika,Bob}, {Cene,Sašo}, {Nina,Cene}, {Sašo,Dane}, {Nina,Katra}, {Dane,Katra}, {Tina,Oton}, {Jan,Tina}, {Vika,Nina}, {Tina,Fani}, {Tina,Nina}, {Cene,Tina}, {Jan,Fani}, {Pino,Oton}, {Katra,Jan}, {Urša,Katra}, {Bob,Katra}, {Dane,Lan}, {Lan,Bob}, {Lan,Sašo}, {Sašo,Bob}, {Vika,Dane}, {Tina,Urša}, {Dane,Tina}, {Jan,Pino}, {Urša,Lan}, {Urša,Pino}, {Riko,Katra}, {Lan,Riko}, {Dane,Urša}, {Jan,Lan}, {Nina,Urša}, {Dane,Fani}, {Bob,Nina}, {Oton,Sašo}, {Cene,Oton}, {Bob,Dane}.

Izidor Hafner

