

## LOGIKA RESNICE IN LAŽI

Ker se bliža tekmovanje v logiki, kaže ponoviti pomen stavčnih povezav. To bomo najlažje storili tako, da rešimo nekaj nalog. Naloge, ki sledijo, smo vzeli iz knjige *R. Smullyana Forever Undecided* (po naše *Za vedno neodločljivo*), ki jo bomo kmalu dobili v prevodu *Urše Demšar*, študentke 1. letnika matematike. Knjiga bo izšla v zbirki Univerza za 21. stoletje.

### McGREGORJEV OBISK

Pretežni del te knjige se dogaja na otoku vitezov in oprod, kjer vitezi vedno govorijo resnico, oprode vedno lažejo, vsak prebivalec pa je bodisi vitez ali oproda.

Osnovno dejstvo, ki velja na tem otoku, je, da nihče izmed prebivalcev ne more trditi, da je oproda. Vitez ne bi nikdar lagal in izjavil, da je oproda, oproda pa ne bi nikoli po pravici povedal, da je oproda.

Naslednji štirje problemi uvajajo štiri osnovne logične povezave: *in*, *ali*, *če-potem* in *če-in-samo-če*, s katerimi pa se bomo podrobneje ukvarjali v 6. poglavju.

### POPISOVALEC

Popise prebivalstva vršijo po državah na vsakih deset let in tudi otok vitezov in oprod ni izjema. Tako je nekega dne na otok priplul popisovalec gospod McGregor z nalogo, da popiše vse zakonske pare na otoku. (Na otoku so tudi ženske vitezi in oprode.)

#### 1. (IN)

McGregor je potrkal na vrata prve hiše. Vrata so se odprla počasi in le za špranjo in mož ga je nezaupljivo pobaral po namenih. "Popisovalec sem," je odgovoril McGregor, "in rad bi izvedel nekaj stvari o vas in vaši ženi. Kateri, če sploh kateri, od vaju je vitez in kateri oproda?"

"Oba sva oprodi!" je jezno zavpil mož in McGregorju zaloputnil vrata pred nosom.

Kateriga tipa je mož in kateriga tipa je žena? (Rešitev sledi drugi uganki.)

#### 2. (ALI)

Pri naslednjih vratih je McGregor ubral drugačno taktiko in tudi mož se je izkazal bolj prijazne narave in ga celo povabil na čaj. Po prijetnem pomenku se je McGregor pozanimal: "Ali sta oba oprodi?" Mož pa mu je odgovoril: "Vsaj eden od naju je oproda."

Kateriga tipa sta ta dva zakonca?

#### Rešitev 1. uganke

Če bi bil mož vitez, ne bi nikoli izjavil, da sta on in njegova žena oba oprodi. Torej mora biti oproda. Ker je oproda, njegova izjava ni resnična in ni res, da sta oba oprodi. To pomeni, da mora biti njegova žena vitez. Mož je torej oproda, žena pa vitez.

#### Rešitev 2. uganke

Če bi bil mož oproda, potem bi bilo res, da je vsaj eden izmed njiju oproda, in oproda bi govoril resnico. Zato mora biti mož vitez in njegova izjava resnična. Eden izmed njiju je oproda, vendar

to ni mož. Oproda je njegova žena. Tako je rešitev tega problema nasprotna prejšnji: on je vitez in ona je oproda.

Naslednji problem je bolj zanimiv kot prejšnja dva (vsaj za vse tiste, ki ga še ne poznajo):

### 3. (ČE-POTEM)

Naslednji zakonski par je bil skrivnostnejši. Vrata je plaho odprl sumničav starejši mož. Ko ga je McGregor prijazno povprašal po njem in njegovi ženi, je bilo vse, kar je odvrnil: "Če sem jaz vitez, je vitez tudi moja žena."

McGregor se je poklapano obrnil in odkorakal. "Kako naj karkoli zvem iz takega odgovora?!" Ravno je hotel v rubriko "vitez/oproda" napisati: "Oba neznan", ko se je nekje v zadnjih zaprašenih kotičkih njegovih možganov nenadoma prebudil star zamegljen spomin na predavanje iz logike iz njegovih oxfordskih dni. "Seveda", se je domislil, "saj lahko celo obema določim tip!"

Kateriga tipa sta zakonca?

#### Rešitev:

Recimo, da je mož vitez. Potem je res, kar je izjavil, namreč, da je njegova žena vitez, če je on vitez, torej je njegova žena vitez. To dokazuje, da če je mož vitez, mora biti tudi njegova žena vitez. To pa je ravno to, kar je izjavil mož - da če je on vitez, je vitez tudi njegova žena. Torej je govoril resnico in mora biti vitez. Zdaj vemo, da je vitez, dokazali pa smo tudi že, da če je on vitez, mora biti tudi njegova žena vitez. Torej sta oba viteza.

Ideja zadnje uganke je mnogo širša, kot bi si kdo mislil. Poglejmo si naslednjo inačico uganke: Recimo, da pridete na otok iskat zlato. Preden pa začnete kar na vrat na nos kopati, bi radi vedeli, če je na otoku sploh res zlato. Seveda je jasno, da domačini to najbolje vedo. Recimo, da vam domačin pove tole: "Če sem jaz vitez, je na otoku zlato." Potem lahko upravičeno domnevate, da je domačin vitez in da na otoku je zlato. Sklepanje je enako kot pri tretji uganki: recimo, da je domačin vitez. Potem je res, da če je on vitez, je na otoku zlato. To dokazuje, da če je on vitez, je na otoku zlato. Ker je izjavil točno isto stvar, mora biti vitez. In na otoku mora biti zlato.

Tretja uganke in njena zlatokopna varianta sta posebna primera dejstva, ki je dovolj pomembno, da ga bomo zapisali kot *izrek št. 1*:

**Izrek št. 1.** Če domačin z otoka vitezov in oprod izjavi: "Če sem jaz vitez, potem  $p$ ", mora biti vitez in trditev  $p$  mora biti resnična.

Tretja uganke je poseben primer izreka št.1, kjer je trditev  $p$  trditev, da je domačinova žena vitez. Zlatokopna varianta je ravno tako primer tega izreka, le da je trditev  $p$  trditev, da na otoku obstaja zlato.

Izreka št.1 sledi tudi, da nihče z otoka vitezov in oprod ne more izjaviti tegale: "Če sem jaz vitez, potem Miklavž obstaja." (razen, seveda, če Miklavž v resnici ne obstaja).

### 4. (ČE IN SAMO ČE)

Četrti zakonski mož je popisovalcu povedal: "Moja žena in jaz sva istega tipa: ali sva oba

viteza ali pa oba oprodi." (Mož bi lahko ravno tako izjavil: "Vitez sem, če in samo če je moja žena vitez." Pride na isto.)

Kaj lahko sklepamo o možu in kaj o ženi?

#### Rešitev:

Možu ne moremo določiti tipa, lahko pa ugotovimo, katerega tipa je žena:

Če bi bila žena oproda, mož ne bi nikoli trdil, da je istega tipa kot njegova žena, ker bi to pomenilo isto, kot če bi trdil, da je oproda, česar ne more. Zato je žena vitez.

Alternativna rešitev je taka: mož je bodisi vitez bodisi oproda. Če je vitez, je njegova izjava resnična in on in njegova žena sta res istega tipa, kar pomeni, da je njegova žena tudi vitez. Če pa je oproda, je njegova izjava neresnična in on in njegova žena sta različnega tipa, torej je žena spet vitez (Možev tip je nedoločljiv: lahko je vitez, ki pravilno trdi, da je istega tipa kot žena, lahko pa oproda, ki laže, da sta z ženo istega tipa.).

Ta uganka je poseben primer naslednje: recimo, da domačin izjavi: "Vitez sem, če in samo če je *p* resnična." Kaj lahko sklepamo?

Dve izjavi sta *ekvivalentni*, če sta obe resnični ali obe neresnični. Z drugimi besedami, če je ena resnična, je resnična tudi druga. Dve izjavi sta *neekvivalentni*, če nista ekvivalentni – če je ena resnična, druga pa neresnična. Domačin je izjavil: "Vitez sem, če in samo če je *p* resnična." Recimo, da je *v* izjava, da je domačin vitez, potem domačin trdi, da je *v* ekvivalentna *p*. Če je vitez, je njegova trditev resnična, torej je *v* res ekvivalentna *p*, in ker je *v* resnična (domačin je vitez), je resnična tudi *p*. Če pa je oproda, je njegova trditev neresnična, *v* ni ekvivalentna *p* in ker je *v* neresnična (domačin je oproda), je *p* resnična (ker je vsaka izjava, ki ni ekvivalentna neresnični izjavi, očitno resnična). *P* je torej vedno resnična, *v* pa nedoločljiva. To naj bo izrek št. 2:

**Izrek št. 2.** Če domačin z otoka vitezov in oprod izjavi: "Vitez sem, če in samo če je *p*", mora biti izjava *p* resnična, ne glede na to, ali je domačin vitez ali oproda.

Vrnimo se k iskanju zlata na otoku. Recimo, da domačin izjavi: "Vitez sem, če in samo če je zlato na otoku." Potem po izreku št.2 (če kot *p* vzamemo izjavo, da je na otoku zlato) na otoku mora biti zlato, čeprav ne moremo določiti, ali je domačin vitez ali oproda.

Če domačin izjavi: "Če sem vitez, je na otoku zlato", lahko sklepamo oboje (izrek št.1), da je domačin vitez in da je na otoku zlato. Če pa namesto tega izjavi: "Vitez sem če in samo če je na otoku zlato", lahko sklepamo le (izrek št.2), da je na otoku zlato, ne moremo pa določiti, ali je govorec vitez ali oproda.

Izrek št.2 je v svoji slavni uganki uporabil filozof Nelson Goodman. Povemo jo lahko takole: Recimo, da greste na otok vitezov in oprod in hočete izvedeti, ali je na otoku zlato, da ne boste kopali kar tjavdan. Srečate domačina, ki mu lahko zastavite samo eno *da/ne* vprašanje (to pomeni, da je odgovor lahko samo da ali ne). Kako bi izvedeli, če je na otoku zlato?

Vprašanje, ki "deluje", je: "Ali je res, da ste vitez, če in samo če je na otoku zlato?" Če odgovori *da*, potem je na otoku zlato (izrek št.2). Če odgovori *ne*, potem na otoku ni zlata (ker zanika, da je njegovo viteštvo ekvivalentno dejstvu, da je na otoku zlato, kar je isto, kot če bi trdil, da je njegovo viteštvo ekvivalentno dejstvu, da na otoku ni zlata in po

izreku št.2 na otoku spet ni zlata).

#### Nekaj podobnih ugank

5. Kakšno izjavo bi moral domačin dati, da bi iz nje lahko sklepali, da če je vitez, je na otoku zlato, če pa je oproda, zlato na otoku je ali pa ga ni?

6. Kakšno izjavo bi moral domačin dati, da bi lahko sklepali, da če je na otoku zlato, je domačin vitez, če pa na otoku ni zlata, je lahko ali vitez ali oproda?

7. Nekoč sem obiskal otok in povprašal domačina: "Ali je na otoku zlato?" Odgovoril je le: "Nikoli nisem trdil, da je na otoku zlato." Kasneje se je izkazalo, da je na otoku res na kupe zlata. Ali je bil domačin vitez ali oproda?

#### Rešitve

5. Veliko je izjav, ki bi jih lahko dal domačin. Ena izmed njih je: "Vitez sem in na otoku je zlato." Druga je: "Na otoku je zlato in na otoku je srebro." (Če je domačin vitez, potem sta na otoku tako zlato kot srebro. Če pa je na otoku zlato, domačin še ni nujno vitez – sploh ni nujno, da je na otoku srebro.)

6. Ena izmed takih izjav je: "Ali sem jaz vitez, ali pa je na otoku zlato." Fraza "ali-ali" pomeni vsaj eno, če ne oboje. In tako če na otoku je zlato, potem je res, da je ali domačin vitez, ali pa na otoku zlato. Torej, če na otoku je zlato, potem je domačinova izjava resnična, kar pomeni, da je domačin vitez. Če na otoku je zlato, je torej domačin vitez.

Domačin pa bi bil lahko vitez, tudi če na otoku ni zlata, ker če je vitez, potem je res, da je ali on vitez ali pa na otoku zlato.

Še ena taka izjava: "Ali je na otoku zlato ali pa srebro."

7. Recimo, da je domačin oproda. Potem je njegova izjava neresnična, kar pomeni, da nekoč je trdil, da na otoku je zlato. Njegova trditev je morala biti napačna (ker je oproda), kar pomeni, da na otoku ni zlata. Toda povedal sem vam, da na otoku je zlato. Zato ne more biti oproda, temveč je vitez.

#### V ISKANJU OONE

V južnem Pacifiku je cela skupina otokov vitezov in oprod, kjer so nekateri prebivalci pol ljudje in pol ptiči. Ti ptiči–ljudje lahko letijo kot ptiči in govorijo kot ljudje.

To je zgodba o filozofu – pravzaprav o logiku – ki je nekoč obiskal te otoke in se zaljubil v ptiča-dekle, ki ji je bilo ime Oona. In tako sta se poročila. Njun zakon je bil srečen, le da je bila Oona zelo frfotava. Na primer, zvečer je prišel logik domov na večerjo, ker pa je bil posebno lep večer, je Oona odletela na kak drug otok. Logiku ni preostalo drugega, kot da je privlekel na plan svoj kanu in mukoma veslal od otoka do otoka, dokler ni našel Oone in jo pripeljal domov. Kadarkoli je Oona pristala, so jo videli pristajati prav vsi domačini na tistem otoku. Ko pa se je spustila, jo je bilo ponavadi zelo težko najti, zato je logik od domačinov najprej poskušal zvedeti, če je Oona sploh pristala pri njih. Kar je stvar oteževalo, je bilo dejstvo, da so bili nekateri domačini oprode, ki nikoli niso govorili resnice. Nekateri logikovi doživljaji so bili prav nenavadni!

1. Nekoč je logik na nekem otoku v iskanju Oone srečal dva domačina, A-ja in B-ja. Vprašal ju je, če je Oona pristala na njunem otoku in prejel naslednja odgovora:

A: "Če sva B in jaz oba viteza, je Oona na tem otoku."

B: "Če sva A in jaz oba viteza, je Oona na tem otoku."

Je Oona na otoku ali ne?

2. Spet enkrat drugič sta dva domačina dala taki izjavi:

A: "Če je eden od naju vitez, je Oona na tem otoku."

B: "To je res."

Je Oona na tem otoku?

3. Naslednjega dogodka se ne spominjam preveč jasno. Vem, da je logik srečal dva domačina in da je A izjavil: "B je vitez in Oona je na tem otoku." Toda ne spominjam se dobro, kaj je izjavil B. Zdi se mi, da je rekel: "A je oproda in Oone ni na tem otoku", ali pa je rekel: "A je oproda in Oona je na tem otoku." Če bi se le lahko spomnil, kaj je izjavil B! Kakorkoli že, spominjam se, da je logik lahko ugotovil, ali je Oona na otoku ali ne. Je Oona tukaj ali ne?

4. Nekoč je logik mukoma priveslal na zelo majčken otok, kjer je živelo samo šest domačinov. Vsakega je povprašal po Ooni in vseh šest mu je začuda odgovorilo enako: "Vsaj en oproda je danes zvečer videl Oono pristati na otoku."

Ali je kateri domačin tisti večer videl Oono pristati na otoku?

5. Nekoč je logik doživel nekaj prav čudnega. Na nekem otoku je srečal pet domačinov, ki so ga že poznali in mu prihiteli nasproti, ko se je izkrcal. Dali so naslednje izjave:

A: "Oona je na tem otoku."

B: "Oone ni na tem otoku."

C: "Oona je bila tukaj včeraj."

D: "Oone danes ni tukaj in tudi včeraj je ni bilo tukaj."

E: "Ali je D oproda ali pa je C vitez."

Logik je malo premišljeval, pa ni prišel nikamor.

"Ali ne bi vsaj eden izmed vas dal, prosim, še ene izjave?" je prosil logik in takrat je A rekel: "Ali je E oproda ali pa je C vitez."

Je Oona na tem otoku?

### Rešitve

1. V bodoče se bom zadovoljil s krajšimi rešitvami, kot sem jih dajal poprej.

Recimo, da sta A in B oba viteza. Potem dajeta resnične izjave, iz česar sledi, da je Oona na otoku. Torej če sta oba viteza, je Oona na otoku. To pa je ravno to, kar sta rekla, torej sta oba viteza in Oona je na otoku.

2. Če je kateri izmed domačinov vitez, je njegova izjava resnična, kar vodi do tega, da je Oona na otoku. Torej, če je eden izmed njiju vitez, je Oona na otoku. Tako sta obe njuni izjavi resnični in oba sta viteza, torej je res, da je eden od njiju vitez. Zato Oona je na otoku.

3. Ta uganka je primer tistega, čemur jaz pravim metauganka: ne veste, kaj je izjavil B, veste pa, da je iz A-jeve in B-jeve izjave logik lahko sklepal, če je Oona na otoku (Če vam tega ne bi povedal, uganke nikakor ne bi mogli rešiti!).

Najprej vam bom pokazal, da če bi B izjavil: "A je oproda in Oone ni na tem otoku", logik nikakor ne bi mogel rešiti uganke. Recimo, da je B rekel prav to. Zdaj A ne more biti vitez, ker če bi bil, bi bil vitez tudi B (kot je rekel A), kar bi iz A-ja naredilo oprodo (kot je rekel B). Torej

je A lahko le oproda. Toda zdaj je lahko ali B vitez in Oone ni na otoku ali pa B ni vitez in Oona je na otoku in ni načina, da bi ugotovili, kaj je res. Ker vemo, da je logik lahko ugotovil, ali je Oona na otoku, B ni mogel reči, da je A oproda in Oone ni na otoku. B je torej izjavil: "A je oproda in Oona je na tem otoku." Poglejmo, kaj se sedaj zgodi.

A mora biti oproda iz istega razloga kot prej. Če Oona je na otoku, dobimo naslednje protislovje: potem je res, da je A oproda in da je Oona na otoku, torej je B dal resnično izjavo in B je vitez. A potem je tudi A dal pravilno izjavo, da je B vitez in Oona na otoku, vendar A je oproda! Edina pot iz protislovja je, če rečemo, da Oone ni na otoku. Tako Oone ni na tem otoku, A in B pa sta oba oprodi.

4. Ker je vseh šest domačinov dalo enake izjave, so vsi bodisi vitezi bodisi oprode (vsi so vitezi, če je res to, kar so izjavili, in obratno so vsi oprode). Recimo, da so vsi vitezi. Potem je res, da je vsaj en oproda z otoka videl Oono pristati, to pa bi bilo nemogoče, ker med njimi ni oprod. Zato so njihove izjave neresnične in vsi morajo biti oprode, kar pomeni, da noben oproda na otoku ni videl Oone pristati. Ker pa so vsi domačini oprode, ni tisti večer Oone videl pristati noben domačin.

5. Pokazali bomo, da, če je A oproda, dobimo protislovje. Recimo, da je A oproda. Potem je bila njegova druga izjava neresnična, torej je E vitez in C oproda. Ker je E vitez, je njegova izjava resnična, torej je bodisi D oproda ali pa C vitez. Toda C ni vitez, zato mora D biti oproda. D-jeva izjava je neresnična, torej je bila Oona na tem otoku včeraj ali pa je tam danes. Toda včeraj je ni bilo tam (ker je C rekel, da je bila, C pa je oproda), na tem otoku je Oona danes. To pomeni, da je A-jeva prva izjava resnična, kar pa ne more biti, saj smo predvidevali, da je A oproda! A torej ne more biti oproda, mora biti vitez, njegova prva izjava je resnična in Oona je na tem otoku.

## NAROČILNICA ZA POSAMEZNIKE

Ime in priimek .....

stanujoč(a) .....

naročam revijo *Logika & Razvedrilna matematika* do pisnega preklica.

Naročnino bom poravnal takoj po prejemu položnice.

Datum .....

Podpis .....

Cena posamezne številke je 3 DEM po srednjem tečaju *Banke Slovenije*. Naročnino obračunavamo polletno. Če bo število naročnikov večje od 1500, bomo v drugem polletju zmanjšali naročnino.

Starim naročnikom ni treba ponovno izpolnjevati naročilnice, saj naročilo velja do pisne odpovedi. Seveda pa morajo izpolniti naročilnico tisti učenci, ki so končali šolo, preko katere so bili naročeni, in bi še naprej želeli ostati naročniki.