1. Dejan je zapravil več kot Jereb, toda nobeden od njiju ni jedel sladoleda ali rulade.
2. Zevnikova je zapravila le pol toliko kot Aljaž, toda nobeden od njiju ni jedel sadne kupe ali kremne rezine.
3. Otrok, ki je jedel kremno rezino, je zapravil manj kot Vrabčeva, toda več kot Cimpermanova.
4. Sabina in dekle, ki je zapravilo največ denarja, nista jedli sladoleda.
5. Nadja je zapravila manj kot otrok, ki je jedel sadno kupo, toda več kot otrok, ki je jedel rulado.

ŠOLA LOGIKE
– DVODIMENZIONALNI LOGIČNI PROBLEMI –

Z dvorazsežnim problemom imamo opravka takrat, ko iščemo bijektivno preslikavo med dvema končnima množicama.

Primer: Rado, Peter in Tone so po poklicu trgovec, pek in ribič.
1. Pri nobenem se začetnica poklica ne ujema z začetnico imena.
2. Peter ni trgovec.
Kaj je kdo?

Iščemo torej bijektivno preslikavo med množicama { Rado, Peter, Tone} in {trgovec, pek, ribič}. Nalogo rešimo z razpredelnico (tabelo).

	trgovec	pek	ribič
Rado			
Peter			
Tone			

Drugi pogoj bomo upoštevali tako, da bomo osenčili presek Petrove vrstice in stolpca za trgovca oziroma v ta presek vpisali križec. Dejstvu, da Peter ni trgovec, pravimo *elementarna prepoved*. Iz prvega pogoja sledijo 3 elementarne prepovedi. Ker je trgovčev stolpec izpolnjen s prepovedmi povsod, razen na enem mestu, moramo na to mesto vpisati DA (oziroma ga odkljukati ali vpisati krožec). To pomeni, da je Rado trgovec. Rado zato ni pek (osenčimo ustrezen presek oziroma vpišimo križec v ta presek). Pek mora biti Tone. Zato Tone ni ribič. Ribič mora biti Peter. Naša bijektivna preslikava izgleda takole

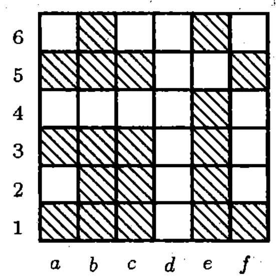
	trgovec	pek	ribič
Rado	○	×	×
Peter	×	×	○
Tone	×	○	×

Rado - trgovec
Peter - ribič
Tone -pek

NALOGE

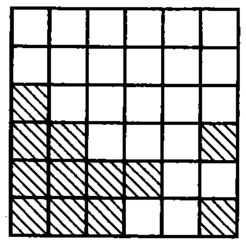
V naslednjih nalogah bomo iskali bijektivne preslikave med množicami $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ in $\{a, b, c, \ldots\}$.

1. Poišči bijektivno preslikavo med množicama s 6 elementi, ki je podana z elementarnimi prepovedmi v tabeli

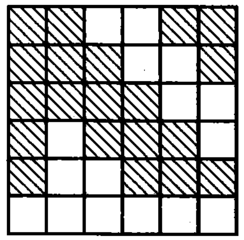


Ali je podano več prepovedi, kot je potrebno za rešitev naloge?

2. Reši nalogi, ki sta podani s tabelama

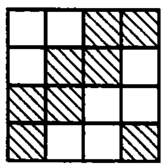


a)

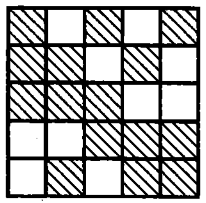


b)

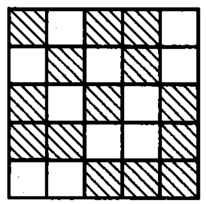
3. Koliko rešitev imajo naloge, ki so podane s tabelami?



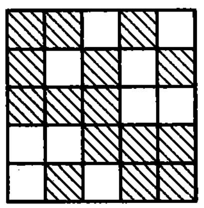
a)



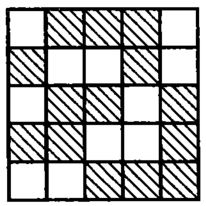
b)



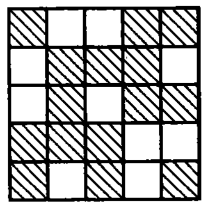
c)



č)



d)

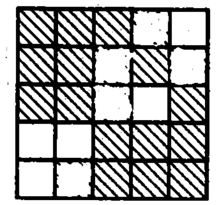


e)

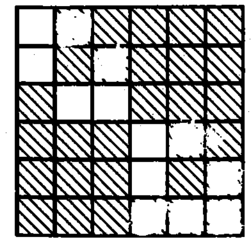
4. Pri reševanju 1. naloge smo ugotovili, da je tipa 6×6 in da za enolično rešitev takšne naloge potrebujemo 15 primernih elementarnih prepovedi.
Seveda pa ni nujno, da ima naloga s 15 elementarnimi prepovedmi enolično rešitev (če

imamo 6 prepovedi v isti vrstici, je naloga protislovna). Tako imamo v nalogi 2.a 15 prepovedi in vseeno 2 rešitvi. Podobno imamo v nalogi 2.b 20 elementarnih prepovedi, kar pomeni, da imamo tu vsaj $20 - 15 = 5$ odvečnih prepovedi.
Do podobnih ugotovitev pridemo pri nalogah 3.a, 3.b, 3.č in 3.d. Vse sodijo v tip 5×5. Zato je za njihovo enolično rešitev zadosti $1+2+3+4 = 10$ elementarnih prepovedi. Pri vseh teh nalogah imamo več prepovedi, kljub temu pa tudi več rešitev.
Zakaj?

5. Koliko rešitev imata nalogi, ki sta predstavljeni na slikah



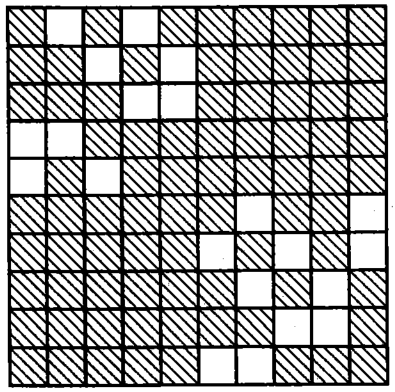
a)



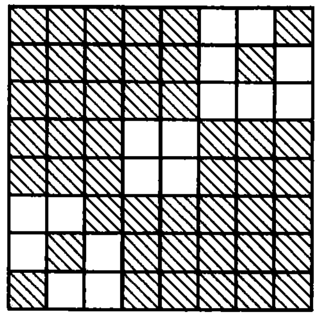
b)

6. Nariši tabele za takšne naloge tipa 4×4, 7×7 in 8×8, tako da se bodo prevedle k reševanju dveh neodvisnih podproblemov.
Kako se izraža število rešitev naloge s številom rešitev dveh neodvisnih podproblemov?

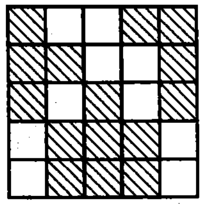
7. Koliko rešitev imajo naslednje naloge



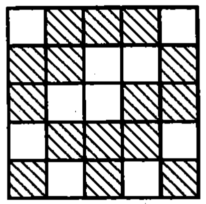
a)



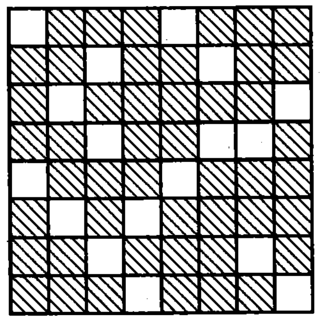
b)



c)

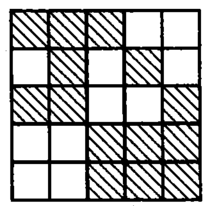


č)

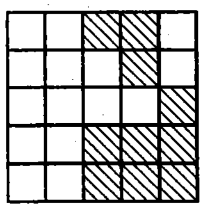


d)

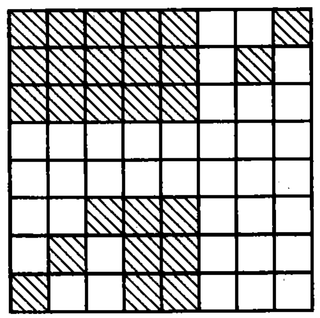
8. Ali lahko probleme na sliki razcepimo na neodvisne podprobleme?



a)

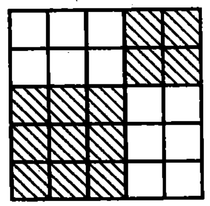


b)

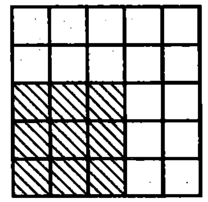


c)

9. Ali sta naslednji dve nalogi rešljivi?

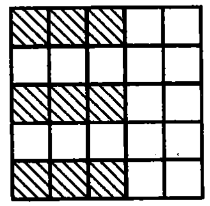


a)

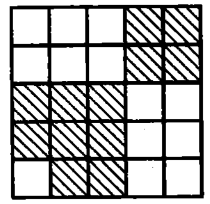


b)

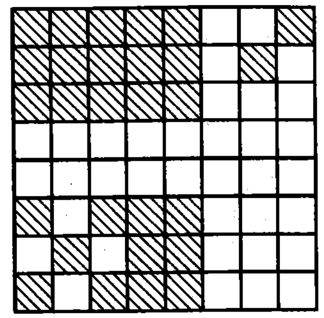
10. Ali imajo rešitev tele naloge?



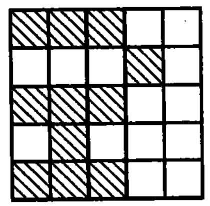
a)



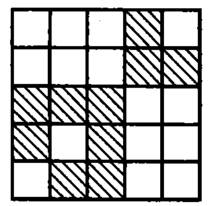
b)



c)

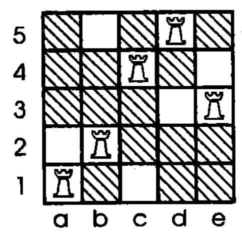


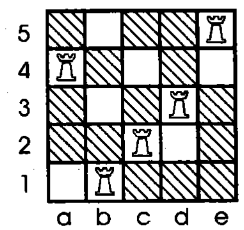
č)



d)

11. Ko predstavimo logično nalogo s tabelo, ki je podobna šahovnici, nam osenčena polja pomenijo "zasedenost", bela polja pa so "prosta". Tule imamo dve "šahovnici", tako da imata v vsaki vrsti in vsakem stolpcu najmanj dve prosti polji.





Na njih so trdnjave razporejene tako, da sta izpolnjena pogoja:

1. trdnjave stojijo na prostih poljih;
2. nobena trdnjava ne napada polja, na katerem stoji druga trdnjava (trdnjava napada polja v vrsti in stolpcu, na katerem stoji).

Dokaži, da na obeh šahovnicah lahko spremeniš položaj trdnjav tako, da bosta pogoja (1) in (2) še vedno veljala.
Premislimo še o splošnem primeru šahovnice $n \times n$, kjer imamo vsaj 2 prosti polji v vsaki vrstici in stolpcu ter n trdnjav, ki ustrezajo pogojema:
1. trdnjave stojijo samo na prostih poljih;
2. nobena trdnjava ne napada druge.

Dokaži, da obstaja nov položaj, ki izpolnjuje oba pogoja.

Teorijo in naloge smo povzeli iz knjige *Bizam, Herceg: Igra in logika*, založba MIR, Moskva. V prihodnji številki se bomo lotili tridimenzionalnih nalog.

REŠITVE

1. Vidimo, da imamo v 1. vrsti (enako v stolpcu c) eno samo prosto polje - d1. To je delna rešitev naše naloge. Vanj včrtamo krožec. Nato osenčimo vsa druga polja v stolpcu d. V tretji vrstici imamo eno samo prosto polje (f3), zato ga obkrožimo. Zdaj lahko osenčimo vsa prosta polja v stolpcu f. Vidimo, da je f5 odvečna prepoved (pri tem poteku reševanja). Zdaj imamo v drugi vrstici eno samo prosto polje (a2). Podobno dobimo še delne rešitve c6, b4 in e5.
Koliko elementarnih prepovedi moramo imeti in kje morajo biti razporejene, da ima naloga enolično rešitev?
Na začetku moramo imeti v eni vrstici (ali stolpcu) 5 elementarnih prepovedi in eno prosto polje. To predstavlja prvo delno rešitev. Polje obkrožimo in osenčimo vsa polja v stolpcu (vrstici) delne rešitve (če je bilo katero že osenčeno, je to odvečna prepoved).
Zdaj smo nalogo prevedli na tip 5×5. Zato potrebujemo 4 elementarne prepovedi v eni vrstici (ali stolpcu). Dobimo drugo delno rešitev in prevedemo problem na tip 4×4. Tako nadaljujemo. Za nalogo 2×2 je potrebna in zadostna ena prepoved. Vidimo torej, da ima logična naloga tipa 6×6 enolično rešitev, če imamo $1+2+3+4+5 = 15$ primerno postavljenih elementarnih prepovedi.

2. a) Enolično so določene delne rešitve a6, b5, c4, f2. Za preostali dve mesti imamo dve možnosti d1, e3 in d3, e1. b) Naloga ima dve rešitvi.

3. a) 2 rešitvi b) 2 rešitvi c) 3 rešitve č) 2 rešitvi d) 3 rešitve e) 2 rešitvi

4. Na eni strani imamo odvečne pogoje, na drugi pa nimamo zadosti elementarnih prepovedi za enolično rešitev.

5. a) Naloga razpade na dva neodvisna podproblema tipov 2×2 in 3×3. Vsak ima 2 rešitvi, zato je skupaj $2 \cdot 2 = 4$ rešitev.
b) Naloga razpade na dva podproblema tipa 3×3. Eden ima 2, drugi pa 3 rešitve, zato je $2 \cdot 3 = 6$ rešitev osnovne naloge.

6. Število rešitev naloge, ki razpade na neodvisne podprobleme, je zmnožek števila rešitev podproblemov.

7. a) $2 \cdot 3 = 6$ b) $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ c) 4 č) 4 d) 12

8. a) Da. Kvadrat a4 moramo osenčiti. Če bi na a4 imeli krožec, potem bi imeli 1. ali 2. vrsto popolnoma osenčeno.
b) Da. Kvadrate a3, a4, a5, b3, b4, b5 moramo osenčiti.
c) Da. Desni spodnji pravokotnik 5 x 3 moramo osenčiti.

9. Nalogi nimata rešitvi (sta protislovni).

10. a) ni rešitve b) naloga je rešljiva c) ni rešitve
č) ni rešitve d) rešitev obstaja

11. Če imamo opravka z bijektivno preslikavo med dvema končnima množicama, potem jo lahko predstavimo z matriko (a_{ij}), kjer je $a_{ij} = 1$, če se i–ti element prve množice preslika v j–ti element druge množice.

Zaradi predstavitve s trdnjavami na šahovnici vzemimo, da gre za množici $(a, b, c, d, \ldots)$ in $(1, 2, 3, 4, \ldots, n)$.
Primer:

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{c} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}
\end{array}$$

Matrika predstavlja bijektivno preslikavo natanko tedaj, kadar imamo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu natanko eno enico.

Če si enke predstavimo kot trdnjave na šahovnici, vidimo, da nobena trdnjava ne napada druge. Logična naloga je v tem, da poiščemo enice v matriki, če je podana neka množica ničel v matriki. Tem ničlam smo rekli elementarne prepovedi.

Postopek pri reševanju dvodimenzionalnih logičnih problemov je tak:

Poiščimo stolpec ali vrstico matrike (tabele), v kateri imamo eno prosto mesto, povsod drugod pa ničle (prepovedi). V to mesto vpišemo 1. Rekli bomo, da smo dobili delno rešitev. Nato označimo z 0 vsa ostala mesta v vrstici (stolpcu). Če so tam že od prej kakšne 0, potem so to odvečne prepovedi. Če pa je tam kakšna 1, je sistem protisloven. Zdaj lahko odpravimo to vrstico in stolpec in ponavljamo postopek. S tem smo prevedli problem na podproblem.

Kaj pa, če pridemo do podproblema, kjer nobena vrstica in noben stolpec ni takšen, da bi bila vsa mesta razen enega pod prepovedjo. To pomeni, da ima vsaka vrstica in vsak stolpec vsaj dve prosti mesti. Potem je možno:
a) da je naloga protislovna;
b) da ima naloga več rešitev.

Primer:

$$\begin{bmatrix} 0 & - & 0 & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & - & 0 & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & - & 0 & - & 0 \end{bmatrix}$$

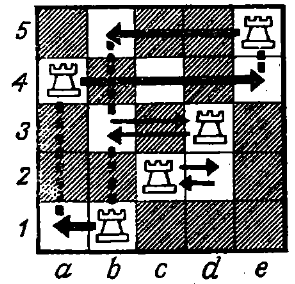
Črtica stoji na prostem mestu. Tu ni možno vpisati 1, da bi ustrezala pogoju.

Drugo možnost obravnava naslednji izrek:

Če imamo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vsaj dve prosti mesti in ima sistem rešitev, potem ima sistem vsaj še eno rešitev.

Dokaz: Pri tem si pomagamo s predstavitvijo s trdnjavami na šahovnici. Naloga se zdaj glasi takole:
Imamo n trdnjav na šahovnici $n \times n$, ki izpolnjujejo pogoje:

1. vse trdnjave so postavljene na prostih kvadratkih;
2. v vsaki vrstici in vsakem stolpcu je natanko ena trdnjava;
3. na vsakem stolpcu in v vsaki vrstici imamo vsaj dva prosta kvadratka (enega zaseda trdnjava).



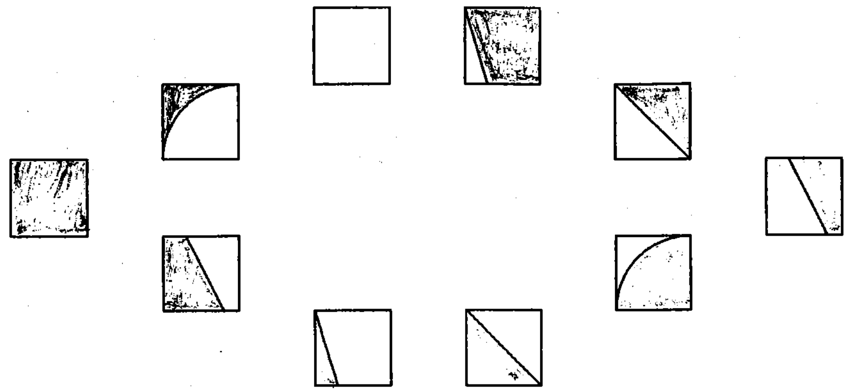
a

Potem obstaja vsaj še ena razporeditev trdnjav, ki ustreza prvemu in drugemu pogoju. Vzemimo poljuben kvadrat s trdnjavo. V isti vrsti obstaja vsaj eno prosto mesto. Prestavimo trdnjavo v to mesto in zaznamujemo premik s puščico od začetne do končne točke. Toda zdaj imamo v stolpcu dve trdnjavi (povežemo ju s črtkano črto). Drugo trdnjavo premaknemo po horizontali v nov prosti kvadrat. Zdaj se lahko zgodi:
a) stolpec še ni zaseden;
b) v stolpcu sta dve trdnjavi.
V prvem primeru smo že našli novo rešitev, v drugem pa ponavljamo postopek.
Proces nadaljujemo toliko časa, dokler ne pridemo do vertikale s kvadratkom, iz katerega že izhaja horizontalna puščica. Prej ali slej se to mora zgoditi. Najpozneje takrat, ko povežemo n-to črtkano črto.
Nova pozicija izpolnjuje pogoja 1) in 2): Prvi pogoj je izpolnjen, ker smo vse trdnjave postavili na proste kvadrate.
Drugi pogoj moramo gledati posebej za vertikale in posebej za horizontale.
Ker smo vse trdnjave premikali samo po horizontalah, zasede vsaka trdnjava eno vrstico. Povežimo s prekinjeno črto nov položaj premaknjene trdnjave s trdnjavo, ki jo moramo za tem premakniti. Vsaka vertikala pripada eni od skupin: ene imajo to črto, druge ne.
V prvi skupini imamo vsaj dve vertikali (prvo in zadnjo).
Ker puščice in prekinjene črte predstavljajo sklenjeno pot, moramo imeti vsaj prekinjeni črti. Vsaka prekinjena črta ima dva konca. Eden sovpada s koncem puščice, drugi z začetkom. Trdnjava se pri premiku preseli iz začetka puščice na konec. Zato na vseh vertikalah, kjer imamo prekinjene črte, stoji toliko trdnjav na začetku kot na koncu.
Seveda pa nimamo prekinjene črte, če tam ni bilo trdnjave. Ker pa je po predpostavki na začetku v vsaki vertikali ena trdnjava, mora biti tudi v vsaki vertikali prekinjena črta.
Število elementarnih prepovedi, ki je potrebno in zadostno za enolično rešitev dvodimenzionalne naloge, dobimo takole: za postavitev prve 1 potrebujemo $n-1$ elementarnih prepovedi v nekem stolpcu ali vrstici. Po vpisu 1 lahko v ustrezno vrstico (stolpec) vpišemo prepovedi. Nato zmanjšamo problem na $(n-1) \times (n-1)$. Torej potrebujemo $1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$ elementarnih prepovedi.
Ali je dana naloga lahko protislovna? Kot smo videli, imamo razporeditve, ki imajo v vsaki vrstici in stolpcu vsaj dve prosti mesti, vendar so naloge protislovne.
Protislovnost problema ugotavljamo z uvedbo dodatne predpostavke: Izberemo prosto mesto, ga označimo z 1 in izpeljemo vse posledice. S tem smo eliminirali eno vrstico in en stolpec. Problem se prevede na tip $(n-1) \times (n-1)$. Ta postopek ponavljamo. Iskanje se ustavi, ko dobimo stolpec ali vrstico samih elementarnih prepovedi. Ko smo to dobili, moramo preizkusiti še drugo možnost. Seveda pa se vprašamo, ali obstaja tak problem. Za dimenzijo 2×2 takega problema ni, saj ima samo prazna mesta. Kaj pa 3×3? Tu imamo šest praznih mest in tri prepovedi. Tudi tak problem ni protisloven. Ali obstaja problem 4×4, ki izpoljnjuje pogoje o dveh praznih mestih, ki je protisloven?

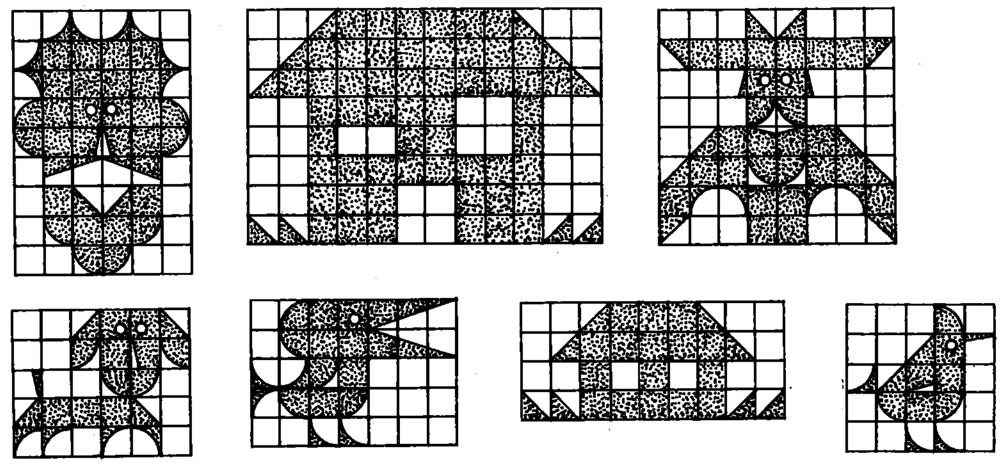
NAGRADNA NALOGA ZA MLAJŠE OD 13 LET

Naloge, ki sledijo smo sestavili s pomočjo didaktične igrače Mozaik.

1. Poveži po dva kvadratka tako, da bosta osenčena dela kvadratkov dala skupaj en osenčeni kvadrat.



2. Poišči ploščine likov (osenčenih delov) na slikah. Enota za merjenje je en osenčeni kvadratek. Majhne krogce, ki ponazarjajo oči, zanemari.



3. Izračunaj ploščine ozadja slik.

4. Nariši nekaj likov, tako da bodo kvadratki osenčeni tako kot v prvi nalogi.