

Diofantske enačbe

Kadar moramo poiskati celoštevilске rešitve enačbe s celoštevilskimi koeficienti, pravimo, da imamo opravka z *diofantsko enačbo*. S takšnimi problemi se je prvi ukvarjal grški matematik Diofant, ki je živel okoli leta 250 po našem štetju.

1. Poišči celoštevilске rešitve enačbe $3x - 8y = 29$.

Rešitev: Oglejmo si, kako bi nalogo reševal veliki švicarski matematik L. Euler (1707 - 1783). Bistvo njegovega postopka je, da se tista neznanka, ob kateri je koeficient absolutno manjši, izrazi z drugo neznanko. V našem primeru rešimo po x :

$$x = \frac{8y + 29}{3}$$

Ulomek na desni zapišemo v obliki celega dela in ulomka:

$$x = 2y + 9 + \frac{2y + 2}{3}$$

Da bi bilo x celo število, mora biti $\frac{2y+2}{3}$ celo število, to je

$$2y + 2 = 3t,$$

kjer je t celo število. To pa je spet diofantska enačba, le da je koeficient ob y v njej absolutno manjši, kot je bil v prvotni enačbi.

Ponovimo postopek na novi enačbi:

$$y = \frac{3t - 2}{2} = t - 1 + \frac{t}{2}$$

Da bi bilo y celo število, mora biti $t = 2v$ in v celo število.

Izrazimo najprej y nato pa še x z v pa dobimo $y = 3v - 1$ in $x = 8v + 7$.

2. Dokaži, da enačba $12x + 15y = 20$ ni rešljiva v množici celih števil.

Rešitev: Če bi enačba imela rešitev v množici celih števil, bi bila njena leva stran deljiva s 3, desna stran pa ni deljiva s 3. To ni mogoče.

Velja izrek (glej): *Enačba $ax + by = c$ je rešljiva v celih številih natanko tedaj, kadar je število c deljivo z največjim skupnim večkratnikom števil a in b .*

3. Reši diofantsko enačbo $103x + 107y = 0$.

Rešitev: Konstantni člen te enačbe je enak 0. Takšnim enačbam pravimo *homogene enačbe*. Homogena enačba ima vedno rešitev $(0, 0)$. Lahko bi uporabili Eulerjev postopek, vendar je lažje uporabiti izrek (glej [1]):

Enačba $ax + by = 0$ ima za rešitev vse pare $x = \frac{b}{d}t$, $y = -\frac{a}{d}t$, kjer je $d = D(a, b)$ največji skupni delitelj števil a in b .

Ker je v našem primeru $d = 1$ (zakaj?), je rešitev $x = 107t$, $y = -105t$, t pa preteče vsa cela števila.

4. Reši enačbo $5x - 2y = 7$.

Rešitev: $x = 2t + 1$, $y = 5t - 1$.

5. Marko je bil leta 1994 star toliko, kot znaša vsota števk njegove letnice rojstva. Koliko je danes star Marko?

Rešitev: 26 let.

6. Pokaži, da sistem

$$\begin{aligned}x + y + z &= 100 \\ 2x + 3y + 4z &= 200\end{aligned}$$

nima nobene rešitve v pozitivnih celih številih. Koliko rešitev ima v nenegativnih številih? ([1], str. 57).

Rešitev: Izrazimo z iz prve enačbe, tako da dobimo $z = 100 - x - y$, in ga vstavimo v drugo enačbo. Po ureditvi dobimo:

$$2x + y = 200.$$

Potem je $y = 200 - 2x = 2(100 - x)$, $z = x - 100$. Vidimo, da je $y > 0$ natanko tedaj, kadar je $z < 0$. Neničelna rešitev je samo $x = 100$, $y = 0$, $z = 0$.

7. Pri katerih celih številih a ima sistem

$$\begin{aligned}2x - 3y + az &= 0 \\ -4x + 6y + 8z &= 0\end{aligned}$$

celoštevilske rešitve?

Rešitev: Gre za homogen sistem enačb, ki ima gotovo vsaj *trivialno rešitev*, kot pravimo rešitvi $(0, 0, 0)$.

i) Če je $a = -4$, druga enačba ni nič drugega, kot prva, pomnožena z -2 . Zato je ena enačba odveč. Izrazimo x iz prve in dobimo $x = y + 2z + \frac{y}{2}$. Potem mora biti y sodo, to je $y = 2t$, z je poljubno celo število, $x = 3t + 2z$. Rešitev je odvisna od izbire dveh števil (t in z), zato pravimo, da imamo dvoparametrično rešitev.

ii) Naj bo $a \neq -4$. Vstavimo $-4x + 6y = -2(2x - 3y) = 2az$ v drugo enačbo. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}2az + 8z &= 0 \\ z(a + 4) &= 0\end{aligned}$$

Ker je a različen od -4 , je $z = 0$. Rešitev enačbe $2x - 3y = 0$ pa je $x = 3t$, $y = 2t$, kjer parameter t preteče množico celih števil.

Opomba: V primeru *i)* smo dejansko imeli samo eno enačbo in tri neznanke, zato smo imeli dvoparametrično rešitev. V primeru *ii)* pa smo imeli dve enačbi in tri neznanke, zato je bila rešitev enoparametrična. Splošno pravilo pravi: Če imamo m enačb in n neznanke, kjer je $m \leq n$, potem lahko m neznanke izrazimo z preostalimi $n - m$ neznančkami. Lahko pa se zgodi, da sistem sploh nima rešitve.

8. Zakaj sistem

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2\end{aligned}$$

nima rešitve (je protisloven)?

Rešitev: Če bi obstajala števila, da bi bili izpolnjeni obe enačbi, bi sledilo $1 = 2$, kar je protislovje.

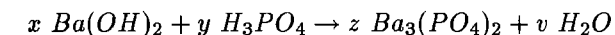
9. Zakaj ima sistem

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2\end{aligned}$$

dvoparametrično rešitev in ne enoparametrično, kot bi pričakovali na osnovi splošnega pravila?

Rešitev: Druga enačba ne prinaša nobenega novega podatka, saj sledi iz prve. Tu imamo v bistvu le eno enačbo. Podobno imamo v sistemu $x + y = 2$, $x - y = 0$, $4x - 2y = 6$ samo dve neodvisni enačbi. Če prvo pomnožimo s 3 in dodamo drugo, dobimo tretjo enačbo.

10. Uporabimo sedaj naše znanje pri reševanju kemijskih enačb (glej [2]). Poiskati moramo reakcijske koeficiente posameznih kemijskih snovi, ki nastopajo v reakciji:



Rešitev: Pogoji, ki ga moramo upoštevati, je, da je število atomov posameznega elementa na levi enako številu na desni. Imamo 4 elemente: Ba , O , H , P . V reakciji nastopata dva reaktanta in dva produkta, neznanke x , y , z , v predstavljajo število molekul teh snovi.

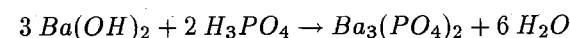
- Za Ba velja: (1) $x = 3z$
 Za O velja: (2) $2x + 4y = 8z + v$
 Za H velja: (3) $2x + 3y = 2v$
 Za P velja: (4) $y = 2z$

Ta homogen sistem diofantskih enačb najlažje rešimo tako, da neznanki x in y , izraženi z neznanko z v enačbah (1) in (4), vstavimo v (2) in (3). Tako dobimo

$$(2') \quad 6z + 8z = 8z + v \text{ in odtod } v = 6z$$

$$(3') \quad 6z + 6z = 2v \text{ in odtod } v = 6z$$

Vidimo, da je ena od zadnji dveh enačb odveč, saj je izpeljiva iz ostalih. Če vzamemo $z = 1$, dobimo $x = 3$, $y = 2$, $v = 6$. Kemijska enačba se torej glasi:



(koeficienta 1 ne pišemo).

Kaj bi se zgodilo, če nobena enačba ne bi bila izpeljiva iz drugih? Matematično gledano bi imeli samo trivialno rešitev in nobene reakcije.

11. Poišči reakcijske koeficiente naslednjih reakcij:

- (a) $\text{PCl}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_3\text{PO}_3 + \text{HCl}$
 (b) $\text{C}_2\text{H}_6 + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO} + \text{H}_2\text{O}$
 (c) $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2 + \text{NaI} \rightarrow \text{CuI} + \text{I}_2 + \text{NaNO}_3$
 (č) $\text{HCl} + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{MnCl}_2 + \text{KCl} + \text{H}_2\text{O}$

Odgovori (koeficienti po vrstnem redu snovi v enačbi):

- (a) 1, 3, 1, 3
 (b) 2, 5, 4, 6
 (c) 2, 4, 2, 1, 4
 (č) 6, 2, 5, 10, 2, 2, 8

[1] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1984.

[2] B. Čeh, *O urejanju kemijskih enačb nekoliko drugače*, Kemija v šoli, April 1993, str. 12–16.

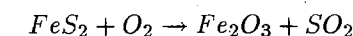
Izidor Hafner

BesAna

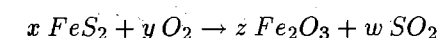
BESEDNA ANALIZA
 SLOVENSKI SLOVNIČNI PREGLEDOVALNIK

Pseudokemijske enačbe

Pri urejevanju kemijske enačbe, kakršna je npr.



moramo določiti neznanke x , y , z in w v enačbi



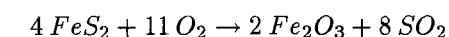
tako, da bo število atomov posameznega elementa na levi in na desni enako. Pri tem moramo poiskati rešitev, v kateri nastopajo najmanjša naravna števila. Pogoji so

$$\text{Fe: } x = 2z$$

$$\text{S: } 2x = w$$

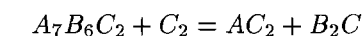
$$\text{O: } 2y = 3z + 2w$$

Druga enačba nam da w izražen z x , prva pa x izražen z z . Tako je $w = 4z$ in če gremo v tretjo enačbo, dobimo $2y = 3z + 8z = 11z$. Najmanjša rešitev je $z = 2$, $y = 11$, $w = 8$ in $x = 4$. Enačba reakcije se torej glasi:

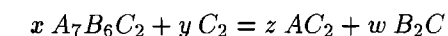


Da ne bi bili preveč vezani na kemijo, predpostavimo, da imamo elemente: A , B , C , D , E , ..., ki tvorijo spojine, mi pa moramo urediti enačbe, ki jih bomo zapisali kar z enakostjo.

1. Uredi enačbo



Rešitev: Iščemo naravna števila x , y , z in w , tako da bo izpolnjena enačba:



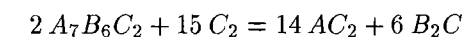
Izenačimo število atomov posameznih elementov na levi in na desni:

$$A: 7x = z$$

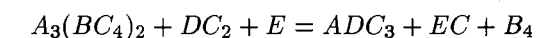
$$B: 6x = 2w$$

$$C: 2x + 2y = 2z + w$$

Iz druge enačbe je $w = 3x$. Vstavimo to in z iz prve enačbe v tretjo $2x + 2y = 14x + 3x$ pa dobimo $2y = 15x$. Rešitev je $x = 2$, $y = 15$, $z = 14$ in $w = 6$. Enačba reakcije se glasi:



2. Uredi enačbo



Odgovor: $2 A_3(BC_4)_2 + 6 DC_2 + 10 E = 6 ADC_3 + 10 EC + B_4$