C: Ta pogoj trdi naslednje: če je z definirano množico A opisana neka lastnost (v metamatematičnem jeziku), je z njenim komplementom, ki je v sistemu tudi definirana množica, opisana negacija prvotne lastnosti.

H: Za vsako število n obstaja stavek, ki trdi, da je število n neobičajno. Ta stavek ima neko Gödlovo število, recimo n^*. Izkaže se, da je za vsako definirano množico A, množica vseh števil n, za katere je $n^* \in A$, recimo ji B, tudi definirana množica. Ker je število n^* pridruženo številu n, smo s tem ravno dobili pogoj H.

Stavek X, o katerem govorimo, je ekvivalenten svoji lastni nedokazljivosti. Tak stavek dejansko mora biti resničen, vendar nedokazljiv (tako kot mora biti oseba, ki trdi, da ni potrjen vitez, nepotrjen vitez) in ga v sistemu s pomočjo Gödlovega oštevilčenja eksplicitno konstruiramo. (Lepa razlaga, kako se to naredi, je podana v knjigi pod točko [7].)

Gödlova odkritja imajo daljnosežne posledice. Kažejo namreč, da je nemogoče poiskati absoluten dokaz doslednosti kateregakoli sistema, ki bi ustrezal Hilbertovi zahtevi. Povedo nam tudi, da obstaja neskončno resničnih aritmetičnih stavkov, ki jih s poljubnimi danimi pravili sklepanja ne moremo formalno izpeljati iz nobenega nabora aksiomov. Izkaže se, da z aksiomatskim pristopom v nekem sistemu nikakor ne moremo zaobjeti celotnega pojma resnice, namreč, da bi iz nekaj podanih aksiomov lahko izpeljali vsako resnično trditev. Kako bi se potem lahko približali pojmu logično-matematične resnice, pa je vprašanje, na katerega danes še ne poznamo odgovora.

Literatura:

[1] *The Foundations of Mathematics*, The New Encyclopaedia Britannica, Encyclopaedia Britannica Inc., London, 1992, 23. knjiga, str. 552 - 560.

[2] *Western Philosophical Schools and Doctrines*, The New Encyclopaedia Britannica, Encyclopaedia Britannica Inc., London, 1992, 25. knjiga, str. 562 - 650.

[3] *The History and Kinds of Logic - 20th Century Logic*, The New Encyclopaedia Britannica, Encyclopaedia Britannica Inc., London, 1992, 23. knjiga, str. 239 - 242.

[4] *Gödel Kurt*, The New Encyclopaedia Britannica, Encyclopaedia Britannica Inc., London, 1992, 5. knjiga, str. 323.

[5] Raymond Smullyan, *Poznate naslov te knjige*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1987.

[6] Raymond Smullyan, *Za vedno neodločeno*, Logika d.o.o., Kamnik, 1992.

[7] *The World of Mathematics, A Small Library of the Literature of Mathematics from A'h-mosé to Albert Einstein*, Tempus Books of Microsoft Press, Washington, 1988, Volume Three, Part IX, Mathemathical Truth and the Structure of Mathematics.

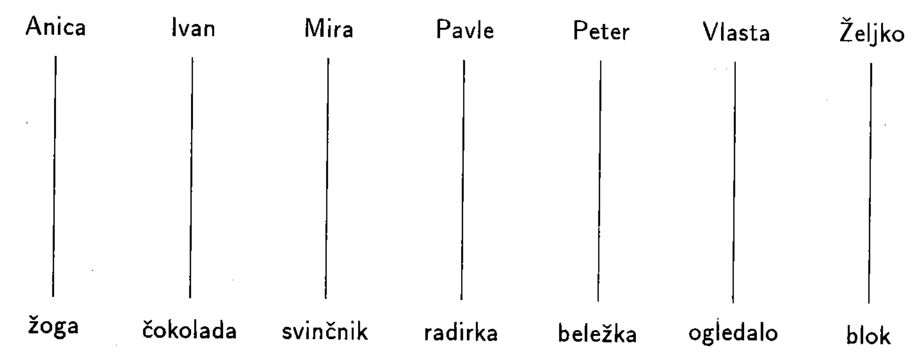
Urška Demšar

JAPONSKA OTROŠKA IGRA AMIDA

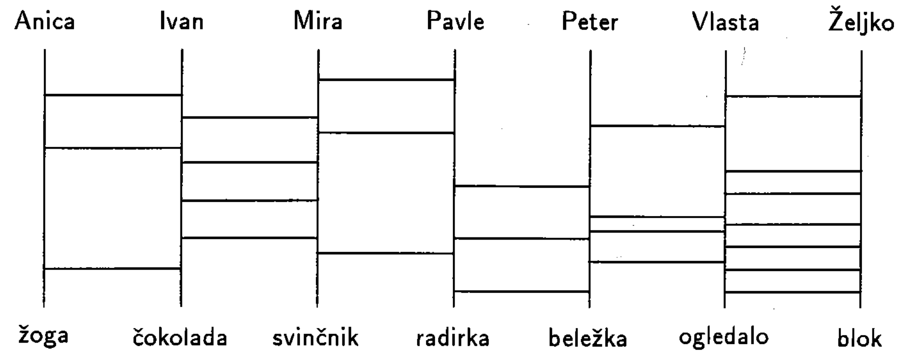
V članku *Japonska dječja igra "amida" i njezina "matematika"* je profesor Vladimir Devide opisal igro, ki je zanimiva za logiko, saj na njenih osnovah lahko sestavimo različne logične naloge.

Obstaja zanimiva otroška igra, ki je zelo razširjena na Japonskem, s katero lahko otroci izmenjujejo predmete, naslove, naloge itn. Obravnavali bomo primer, ko v igri sodeluje sedem otrok. Tako bo vsakomur jasno, kako igro prilagoditi drugačnemu številu udeležencev. Predpostavimo torej, da v igri sodelujejo otroci Vlasta, Pavle, Mira, Ivan, Peter, Željko in Anica. Izdelati moramo loterijo, s bo vsak dobil po enega od sedmih predmetov, npr.: žogo, čokolado, svinčnik, radirko, beležko, ogledalo in blok.

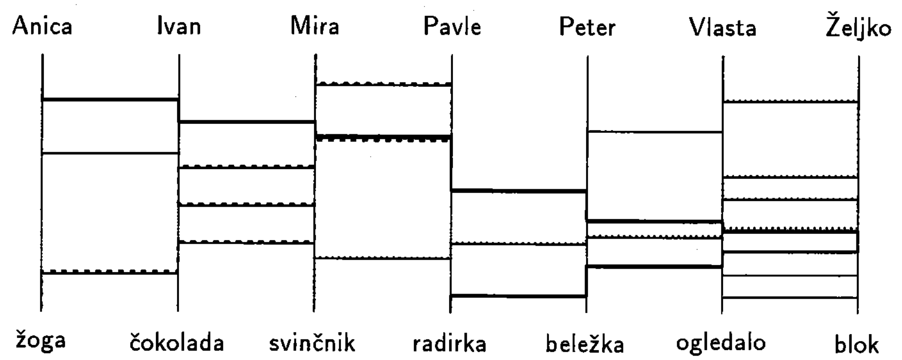
Na list papirja otroci najprej narišejo sedem vzporednih navpičnic. Na vrhu vsake navpičnice napišejo svoja imena, vsako enkrat, recimo po abecednem vrstnem redu ali kako drugače. Poudariti moramo, da izhod igre ni odvisen od tega razporeda. Na dnu navpičnic pa napišejo imena predmetov, pod vsako en predmet. Tudi to ni odločilno za izhod igre. Tako dobimo skico:



To seveda ne pomeni, da bo Anica dobila žogo, Ivan čokolado itn. Odločilni del igre šele nastopi pozneje, sestoji pa iz naslednjega: vsak udeleženec igre vriše v shemo nekaj vodoravnih prečnih črt, ki spajajo sosednje navpičnice. Vsak jih lahko nariše poljubno mnogo in to kjerkoli, edina omejitev je ta, da se nobeni dve vodoravni črti (ne njegove, ne tiste, ki so bile narisane pred tem) ne smeta vodoravno nadaljevati druga za drugo, to je, ne smeta se končati oziroma začeti v isti točki neke navpičnice. Ko otroci vrišejo svoje črte, dobimo shemo na naslednji sliki:



S tem je določeno, kaj bo kdo dobil v tej igri, po naslednjem pravilu: da bi kdo prišel do svojega predmeta, gre vzdolž svoje navpičnice do prve vodoravne prečke, gre po tej prečni črti do sosednje navpičnice (levo ali desno), nato se spusti po njej do prve vodoravne črte, po le-tej preide na sosednjo navpičnico itn., dokler ne prispe na spodnji konec neke navpičnice, kjer ga čaka njegov predmet. Na tretji sliki je vrisana taka pot za Anico z debelo črto, za Miro s črtkano in za Vlasto pikčasto črto. Bralec bo z lahkoto določil poti za ostale udelažence in ugotovil, da bo Ivan dobil beležko, Pavle čokolado, Peter blok in Željko ogledalo.



Nekdo se lahko vpraša: *"Kaj pa če dva dobita isti predmet?"* V tem je ravno odlika igre "Amida", da je vedno pravična do udeleženih. V nobenem primeru se ne more zgoditi, da bi se poti dveh različnih udeležencev končali na spodnjem koncu iste navpičnice. V to se ni težko prepričati in to je "matematika" te igre.

Če gremo na drugi sliki od nekega predmeta od spodaj navzgor, tako da se vzpenjamo do prve prečke, preko katere preidemo na sosednjo navpičnico, potem pa gremo po novi navpičnici spet navzgor do prve prečke itn., bomo na koncu prišli do vrha natanko določene navpičnice, to je tam, kjer je ime udeleženca, ki bo dobil izbrani predmet. Nihče drug ga torej ne more dobiti.

"Matematiko" igre "Amida" lahko razvijamo še naprej: ni se težko prepričati, da bo vsaka prečka prehojena natanko pri dveh različnih poteh. To pomeni, da je končen rezultat odvisen od vseh prečk, to je: nobene ne smemo izpustiti, da bi bil rezultat "Amide" isti. V to se lahko prepričamo takole: izberimo neko prečko in eno od smeri (levo ali desno).

Če gremo v določenem krajišču navzgor, na nasprotnem pa navzdol, bo vsaki izbiri smeri ustrezala pot nekega udeleženca igre do njegovega predmeta.

Če označimo zgornja in spodnja krajišča navpičnic s števili od 1 do 7 po shemi:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$

vidimo, da je končni efekt potovanj navzdol neka prerazporedba (permutacija) števil od 1 do 7. To, da bo Anica dobila radirko, pomeni, da gre 1 v 4, to, da Mira dobi žogo, pomeni, da gre 3 v 1, to, da Vlasta dobi svinčnik pa pomeni, da gre 2 v 5. Ivan dobi beležko, to je, 2 gre v 5. Pavle dobi čokolado, torej 4 v 2. *Peter dobi blok* prevedemo v "5 gre v 7", *Željko dobi ogledalo* pomeni "7 gre v 6". Naša "Amida" določa torej permutacijo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Z malo premisleka lahko z "Amido" realiziramo inverzno permutacijo, ali pa z dvema zaporednima "Amidama" kompozicijo permutacij. Ne bo vam težko modificirati igre, tako da navpičnice niso na listu papija, ampak na plašču pokončnega valja. Ali bi se kdo znašel v "Amidi", kjer bi namesto navpičnic nastopali "meridiani" Möbiusovega traku? Se lahko domislite še kaj v zvezi z "Amido"?

Evropski matematični kenguru

Rešitve za 1. in 2. letnik:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
E	B	B	B	E	B	E	A	C	C	E	D	C	A	B	C	B	C	E	C	E	C	A	B	D

Rešitve za 3. in 4. letnik:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	D	E	C	D	A	B	B	C	B	D	E	D	D	A	E	C	A	B	E	B	C	C	B	B