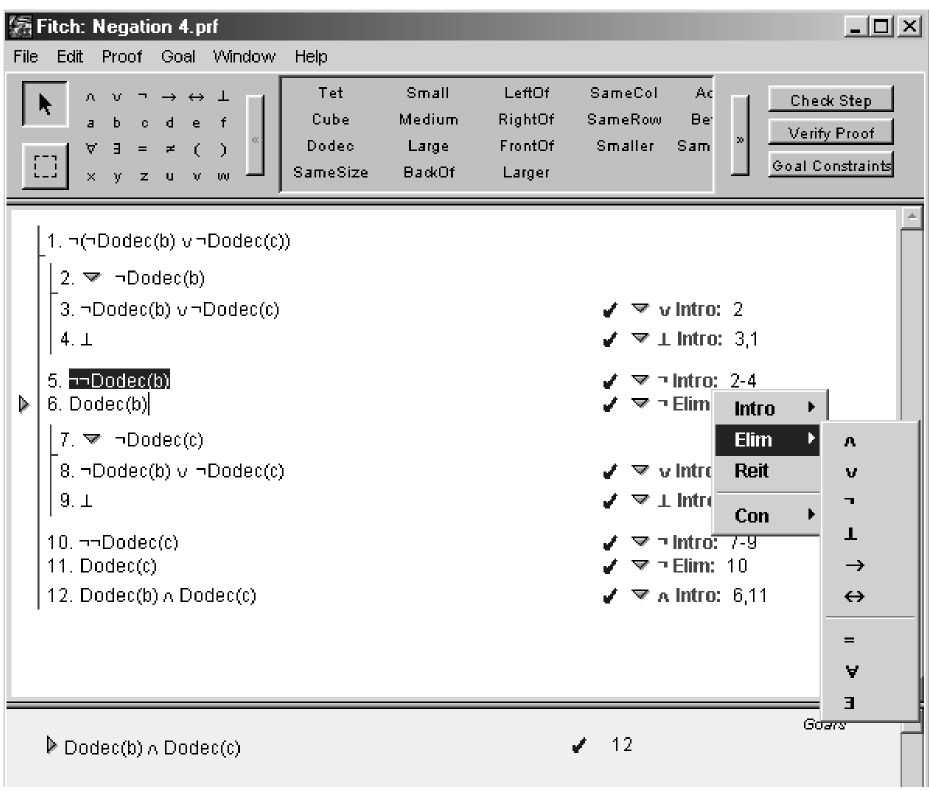
Program Fitch in sistem naravne dedukcije

Program Fitch nam omogoča konstrukcijo dokazov v jeziku prvega reda. Pravila sklepanja, ki jih uporablja, so znana pod imenom naravna dedukcija. Pravila sklepanja delimo na pravila uvedbe (introdukcije) in pravila izločitve (eliminacije). Za vsak sistem logike je nujno, da lahko izpeljemo le veljavne izjave (to je izrek zdravosti) in da izpeljemo vse veljavne izjave (izrek o polnosti ali popolnosti). Pri aksiomatiki pogosto vztrajamo, da je pravil čim manj. Seveda pa to pomeni daljše dokaze. V praksi seveda izpeljane izreke uporabljamo tako kot aksiome in na ta način dokazi postajajo krajši. Edino in glavno vprašanje pri programu je, ali neka izjava logično sledi iz danih izjav. Če uspemo zgraditi izpeljavo izjave iz danih predpostavk, potem je odgovor pritrdilen. Kaj pa, če izjava ni izpeljiva iz predpostavk. V tem primeru moramo poiskati svet, v katerem so vse predpostavke resnične, prva izjava pa ni. Tega pa ne moremo narediti s programom Fitch, lahko pa to naredimo s programom Tarski's world.



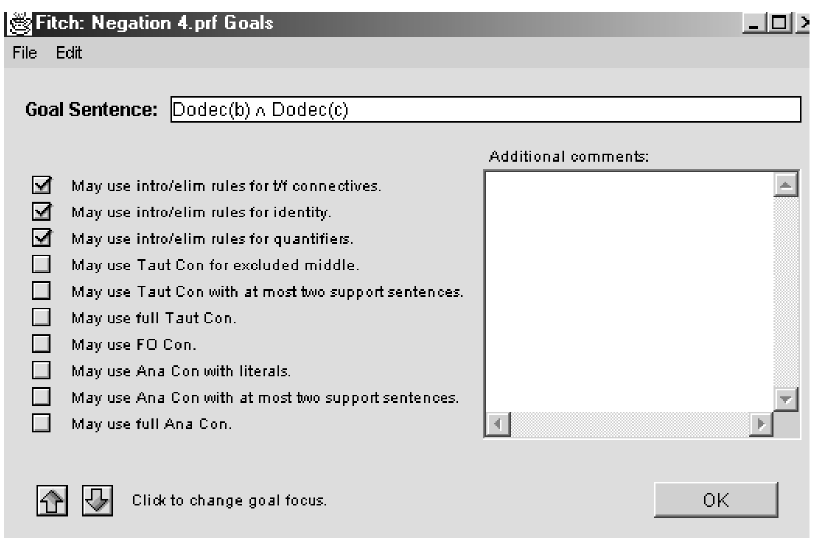
Slika prikazuje tipično okno programa Fitch. V resnici gre za dokaz, da $A \wedge B$ logično sledi iz $\neg(\neg A \vee \neg B)$.
Program omogoča začetek nove naloge, odpiranje obstoječih dokazov, shranjevanje (File); izrezovanje, kopiranje in prestavljanje delov dokaza(Edit); dodajanje korakov v dokazu, uvajanje poddokazov, preverjanje dokazov (Proof), postavljanje ciljev in omejitev (Goal) in dostop do oken (Window).

Orodna vrstica vsebuje gumbe za vnašanje stavkov, verifikacijo koraka, verifikacijo dokaza in določitev omejitev.

Glavno delo se izvaja v dokaznem oknu, ki je podeljeno na dva dela. Na levem delu zgornjega dela vnašamo korake dokaza, na desnem pa razlago, to je, povemo na osnovi katerega pravila sklepanja in iz katerih prejšnjih korakov sledi sklep. Ko vnašamo nov korak, se nam pojavi zahteva po pravilu (Rule?), ki ga izberemo iz menija. Pravila naravne dedukcije so, kot vemo, pravila uvedbe in izločitve.

Spodnji del nam pove, kaj je cilj dokaza. V primeru napake lahko dobimo sporočilo v spodnji vrstici.

Navpična črta na levi se imenuje Fitchova palica, majhna vodoravna črtica loči predpostavke od drugega dela dokaza. Urejujemo lahko le tekočo vrstico, ki je določena s trikotnim premikajočim drsnikom na levi. Nove vrstice vrinemo preko menija (Proof). Pri pojasnevanju koraka moramo razen pravila navesti tudi predhodne vrstice, iz katerih korak sledi. Podporne vrstice izberemo s klikom nanje.



V ciljnem oknu zapišemo izjave, ki jih želimo dokazati (ne nujno samo zadnjo) in navedemo omejitve glede uporabe pravil. Zdaj navedimo nekaj primerov.

$\neg\exists x\, (Tet(x) \land Cube(x))$

$\neg\exists x\, (Cube(x) \land Dodec(x))$

$\neg\exists x\, (Dodec(x) \land Tet(x))$

$\forall x\, (Tet(x) \lor Dodec(x) \lor Cube(x))$

$(Cube(a) \land Dodec(b)) \rightarrow a \neq b$	✔	**Ana Con**
$\forall x\, (Cube(x) \rightarrow \neg Tet(x))$	✔	**Ana Con**
$\forall x\, (Small(x) \rightarrow Cube(x)) \rightarrow \forall y\, (Dodec(y) \rightarrow \neg Small(y))$	✔	**Ana Con**
$\forall x\, (Large(x) \rightarrow (\neg Tet(x) \land \neg Dodec(x) \land \neg Cube(x))) \rightarrow \neg\exists y\, Large(y)$	✔	**Ana Con**

$(Cube(a) \land Dodec(b)) \rightarrow a \neq b$	✗
$\forall x\, (Cube(x) \rightarrow \neg Tet(x))$	✗
$\forall x\, (Small(x) \rightarrow Cube(x)) \rightarrow \forall y\, (Dodec(y) \rightarrow \neg Small(y))$	✗
$\forall x\, (Large(x) \rightarrow (\neg Tet(x) \land \neg Dodec(x) \land \neg Cube(x))) \rightarrow \neg\exists y\, Large(y)$	✗

Poleg osnovnih pravil naravne dedukcije imamo na razpolago še tri zelo močna pravila: tavtološka posledica, logična posledica in analitična posledica. Tavtološka posledica pomeni, da izjava sledi samo z uporabo pravil za izjavne povezave. Logična posledica (FO Con) pomeni, da izjava sledi na osnovi vseh logičnih pravil (pravil logike prvega reda). Analitična posledica pa vključuje tudi pravila, ki veljajo za telesa v svetu Tarskega (npr. če je telo veliko, potem ni majhno).

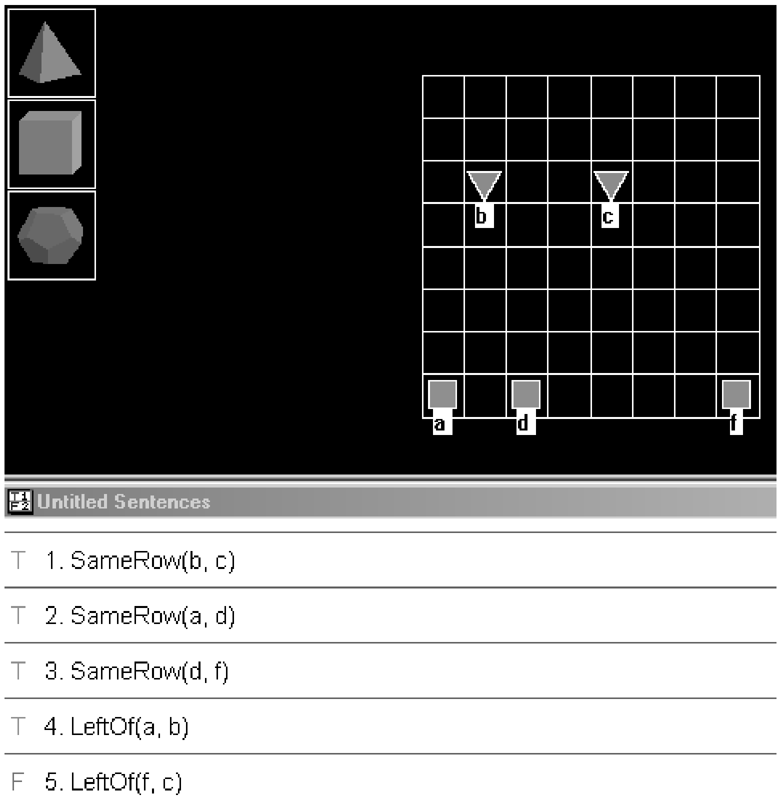
Zgornje posledice res veljajo v svetu Tarskega in to neodvisno od predpostavk. Vendar pa cilji niso doseženi. Ne smemo namreč uporabiti pravila analitične posledice, to je lastnosti sveta Tarskega. V resnici pa so logične posledice, kar je razvidno iz dokaza

1. ¬∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))
2. ¬∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))
3. ¬∃x (Dodec(x) ∧ Tet(x))
4. ∀x (Tet(x) ∨ Dodec(x) ∨ Cube(x))
5. (Cube(a) ∧ Dodec(b)) → a ≠ b ✔ FO Con: 2
6. ∀x (Cube(x) → ¬Tet(x)) ✔ FO Con: 1
7. ∀x (Small(x) → Cube(x)) → ∀y (Dodec(y) → ¬Small(y)) ✔ FO Con: 2
8. ∀x (Large(x) → (¬Tet(x) ∧ ¬Dodec(x) ∧ ¬Cube(x))) → ¬∃y Large(y) ✔ FO Con: 4

V naslednjem primeru zadnja izjava ni analitična posledica predhodnih izjav.

SameRow(b, c)
SameRow(a, d)
SameRow(d, f)
LeftOf(a, b)
LeftOf(f,c,) * Ana Con

To nam pove * v dokaznem polju. Vendar pa ne vemo, zakaj. Odgovor na to vprašanje je konstrukcija sveta Tarskega, v katerem so vse štiri predpostavke resnične, sklep pa napačen. Tule je svet.



Tomislav Žitko