

Pogojna verjetnost, popolna verjetnost, Bayesov obrazec

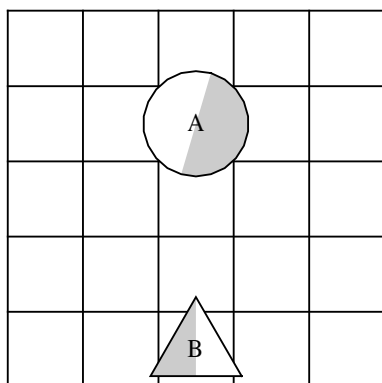
Krog na spodnji sliki pomeni, da ne poznamo oblike lika, ki je lahko trikotnik, kvadrat ali petkotnik. Zato je verjetnost, da je lik A trikotnik $P(A \text{ je trikotnik})=1/3$. Pol siv lik pa pomeni, da ne poznamo barve, ki je lahko bela ali siva. Zato je $P(A \text{ je siv})=1/2$. Verjetnost $P(B \text{ je trikotnik})=1$, $P(B \text{ je bel})=1/2$.

V tem svetu je slučajno izbran en lik, X. Koliko je verjetnost dogodka S, da je izbran lik trikotnik?

Verjetnost, da je $X=A$ je $1/2$, prav tako je verjetnost, da je $X=B$ enaka $1/2$.

Potem je $P(S)=P(X=A)P(X \text{ je trikotnik} | X=A)+P(X=B)P(X \text{ je trikotnik} | X=B)=1/2 \times 1/3 + 1/2 = 2/3$.

Z oznako $P(M/N)$ ali $P(M|N)$ bomo označevali verjetnost dogodka M pri pogoju, da se je zgodil dogodek N.



S	P(S)	$P(X = A S)$	$P(X = B S)$
trikotnik(X)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
bel(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
\neg kvadrat(X)	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
\neg petkotnik(X)	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
siv(X) \wedge kvadrat(X)	$\frac{1}{12}$	1	0
bel(X) \wedge \neg trikotnik(X)	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$
\neg siv(X) \wedge kvadrat(X)	$\frac{1}{12}$	1	0
\neg bel(X) \wedge \neg petkotnik(X)	$\frac{11}{12}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$

Pogojna verjetnost je definirana z $P(M/N)=P(MN)/P(N)$. Pri tem je MN produkt dogodkov M in N, to je dogodek, da se zgodita oba M in N.

Dogodka M in N sta neodvisna, če velja $P(MN)=P(M)P(N)$. Dogodka, da je A trikotnik in da je bel sta neodvisna.

Zdaj bomo imeli poskus, ki poteka v dveh fazah. V prvi fazi nastopi natančno en dogodek iz množice $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$.

V drugi fazi nas zanima dogodek M. Potem velja

$$(1) P(A)=P(H_1)P(M/H_1)+\dots+P(H_n)P(M/H_n)$$

Temu pravimo obrazec za **popolno verjetnost**.

Zdaj pa nas zanima $P(H_i/A)$. Seveda bo veljalo

$$P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i)/P(A)$$

Če na mesto $P(A)$ pišemo (1) dobimo **Bayesov obrazec**.

Koliko je verjetnost, da smo izbrali lik A, če je bil izbran lik trikotnik.

$$P(A \text{ je trikotnik})=2/3. P(H_1)=1/2, P(A \text{ je trikotnik} | X=A)=1/3.$$

$$\text{Torej je } P(X=A | X \text{ je trikotnik})=1/3 \times 1/2 : 2/3 = 1/4.$$

Referenci:

J. A. Čibej, Kombinatorika, Verjetnostni račun, Statistika, DZS, Ljubljana 1996.

Verjetnostna logika, http://www.logika.si/sklop_logika/Verjetnostnalogika.pdf