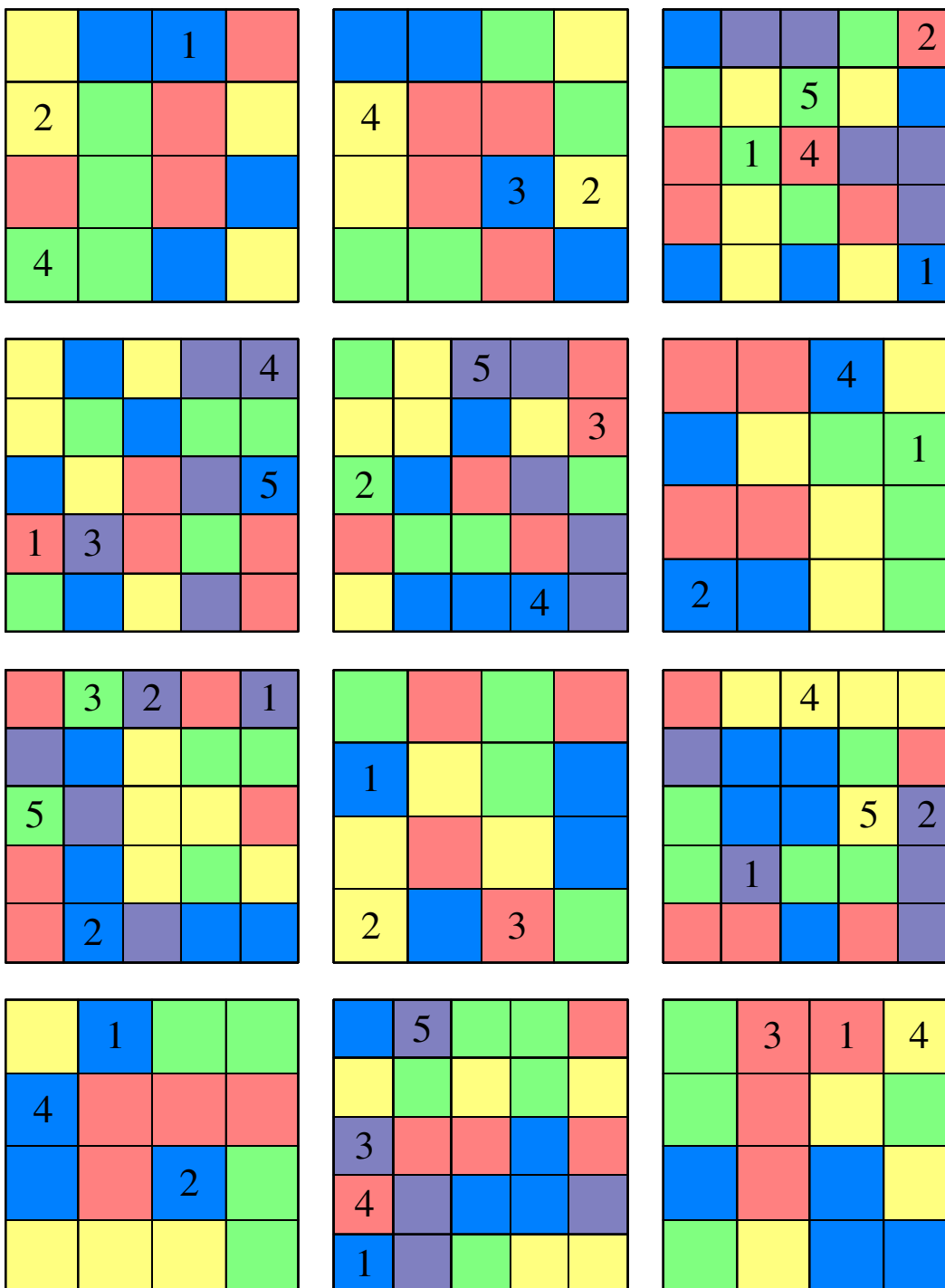


Barvni sudoku

V $n \times n$ kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve nastopalo vseh n števil.



Latinski kvadrati

V $n \times n$ kvadratkov moraš vpisati začetne številke 1, 2, 3, ... tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu nastopalo vseh n števil.

		4		
	3	1		
			5	4
5				
3	4			

		4	3
			4
1			

3			5	
		2	4	
4				1
				2
		5		

		2	
4	2		
			4
	3		

1			
			1
2	4	3	
4	2		
		2	

1			5
	2	4	
5		1	
			4

	4		3	
			2	1
	2	5		
		4		
1				

		4	1
3			
			2
	1		

		3	
	3		1
2			
	2		

1			4
2	3		
			3

	1			
5	2			
1			2	
			5	3
		5		

2		4	
			3
	2	3	

Sudoku s črkami

V $n \times n$ kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih z isto črko nastopalo vseh n števil.

D	A	A	C ⁴
D ¹	B	D	B
C	A ²	A	B
D	C	C	B

C	D	A	D ⁴
C	D ³	A	D
B	A	B	C
B ³	A	B ¹	C

C	D ⁴	D	B
C	D	D	A
C ³	C	A ¹	B
A	B	A	B

C	A	A	A ¹
C ⁴	C	D	A
B ³	B	D	D
B	B	D	C

B	C ¹	D	A ³
D	C	C ²	B
B	A	B	D
C	A	D	A

A	A ³	A ²	A
D	C	D	B
C	C	D	B
C	B ¹	D	B

D	B	C	C ⁴
A	B	A ³	B ²
A	C	B	D
C	D	A	D

C	C	C	B
A	A ⁴	C	A
D	D	B	B
B ³	A	D ¹	D

B	A ⁴	A	C ¹
A	B	A	D
B	C	D	C
D	B	C	D ³

B	A ²	B	A
C	C	D	C ¹
C ⁴	A	A	B
D	B	D	D

B	A ³	A	C
D	C	A ¹	C
D ²	D	A	C
B	D	B	B

C	C	B	A
D ¹	A	C	D
C ⁴	B	D	B
D	A	A	B ³

Futoshiki

V $n \times n$ kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n tako, da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopalo vseh n števil ter da bodo izpolnjene vse relacije.

<p>■ ■ 3 ■</p> <p>■ ■ < ■ < ■</p> <p>■ ■ ■ > 2</p> <p>4 ■ ■ ■</p>	<p>■ ■ > ■ ■</p> <p>■ < ■ 4 ■</p> <p>■ ■ ■ 2</p> <p>■ 2 > ■ ■</p>	<p>■ ■ ■ 5 > ■</p> <p>■ ■ > ■ ■ 2</p> <p>■ ■ 4 2 < ■</p> <p>■ 5 > ■ ■ 1</p> <p>■ 2 ■ ■ 4</p>
<p>■ ■ > ■ 2 ■</p> <p>■ ■ 4 < ■ ■</p> <p>4 ■ ■ ■ ■</p> <p>1 ■ ■ ■ ■</p> <p>3 ■ < ■ < ■ ■</p>	<p>2 ■ > ■ ■</p> <p>■ ■ ■ < ■</p> <p>■ ■ ■ 3</p> <p>■ ■ < ■ 4</p>	<p>■ ■ < ■ 4</p> <p>■ ■ < ■ < ■</p> <p>■ 4 ■ ■</p> <p>■ ■ ■ ■</p>
<p>■ < ■ ■ 2</p> <p>■ 2 ■ ■</p> <p>■ < ■ ■ < ■</p> <p>■ ■ 4 ■</p>	<p>■ > ■ 2</p> <p>■ ■ < ■</p> <p>■ ■ ■</p>	<p>1 < ■ ■ < ■ ■</p> <p>■ ■ 4 2 ■</p> <p>■ 1 ■ ■ 4</p> <p>■ ■ ■ ■</p> <p>■ < 4 > ■ 3 ■</p>
<p>■ ■ > ■</p> <p>■ > ■ ■</p> <p>3 ■ ■</p>	<p>■ 4 ■ < ■ ■</p> <p>■ ■ ■ 5 3</p> <p>■ ■ ■ > ■ ■</p> <p>5 ■ ■ > ■ ■</p> <p>■ 2 ■ ■ > ■</p>	<p>■ ■ ■ ■</p> <p>3 ■ < ■ > 1</p> <p>1 ■ ■ 4</p> <p>■ ■ ■ > ■</p>

Rdeči kvadrati

Naloga reševalca je, da poišče vse skrite rdeče kvadrate in jih označi z R. Pri tem veljata naslednji pravili: a) Vsako število v preglednici pove, koliko sosednjih kvadratkov je rdečih. Kvadrater je soseden kvadratu, če imata skupno stranico ali oglišče. b) Kvadrati s številkami niso rdeči.

	2		1
1	2		
2		2	
		1	

	1	0	
3		2	
2			

			1
2		3	
	2	2	0

0	2		
			3
	1		
			1

2			0
	2		0
1	1		

0			0
		2	
1		2	

	1		1
2		2	
2			

2			
	3		0
	2	0	

			0
	0		
	2		1

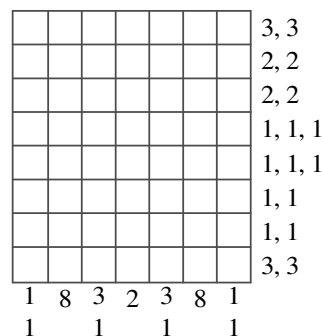
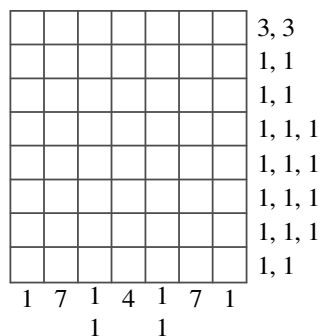
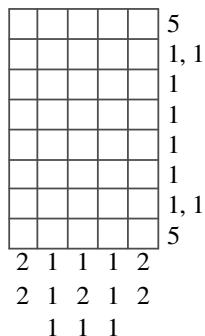
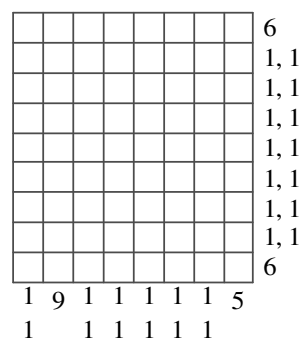
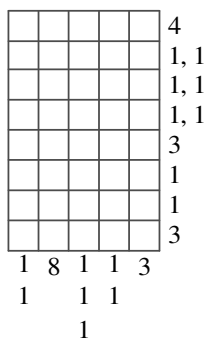
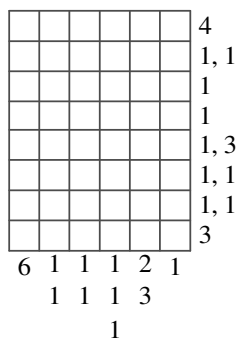
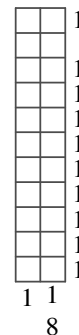
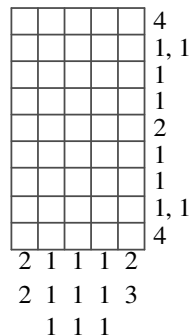
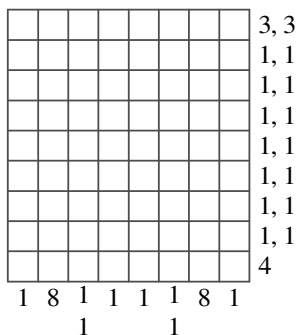
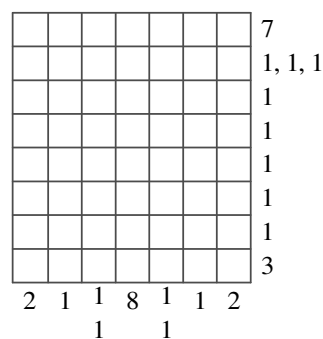
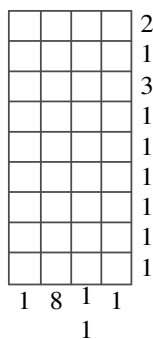
	1	1	0
			2
1		2	

1		1	
2	3	3	
			1
1			

	0		
1			0
		2	
1			1

Gobelini

Kvadratke v razpredelnici moraš pobarvati sivo tako, da bo zaporedje sivih pasov v vrstici ustrezalo zaporedju števil na desni, in da bo zaporedje sivih pasov v stolpcu ustrezalo zaporedju števil pod njim.



Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da je vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in stolpcih enaka številu, ki je zapisano v rdečem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem pa morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

The image displays 12 5x5 magic squares arranged in a 4x3 grid. Each square has a red diagonal and a red square at the top-left corner. The rest of the grid is white. Numbers are placed in the white squares, and the sum of the numbers in each row and column is indicated by a red number in the top-left square of that row and column.

Zbirke nalog iz logike

Na strani http://www.logika.si/sklop_logika/naloge.html

boste našli pet zbirk nalog z enostavnimi gobelini ter večje število drugih zbirk nalog iz logike.

Križni produkti

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 2 do 9 tako, da bo zmnožek števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in stolpcih enak številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalalo. Pri tem pa morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

		12	15	6	56	
	28		14			45
	15		135			
	28	45	420	36		
35			168	24		
36			12			
	24	36				
	36					

		27	24	18	320	
	24		45			45
	63		80			
	15	20	1680	18		
10			72	15		
24			35			
	112	12				
	30					

	10		12
8			
15			

	36	3456	3456	35
24			28	
36			10	
		432	12	
				12
	324			
5				
10			32	

	16	268	6720	18
14			30	
48			12	
		105	35	
				45
	1008			
3				
27			30	

	40	520	5040	6
72			12	
35			15	
		30	35	
				30
	1344			
4				
20			35	

	18	24		
27			48	
64				36
			8	
				54

	36	63		
63			8	
72			35	
		20		56
			24	
				63

	12	40			
12				21	8
20			28	270	6
	14			168	
		60		18	
			54		

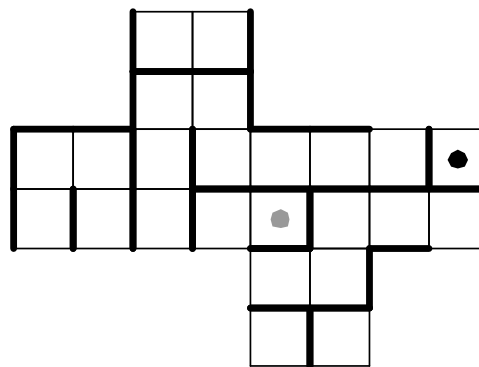
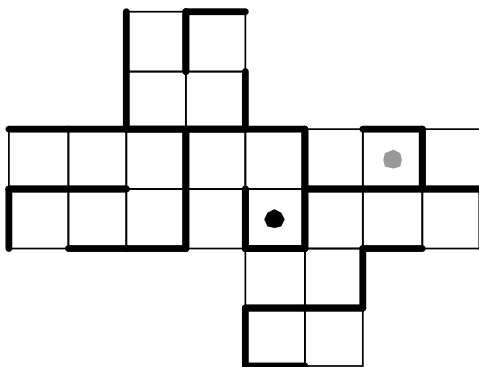
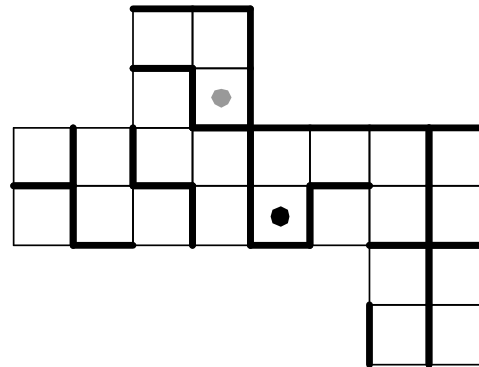
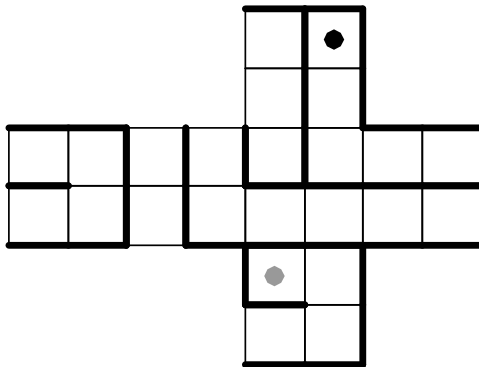
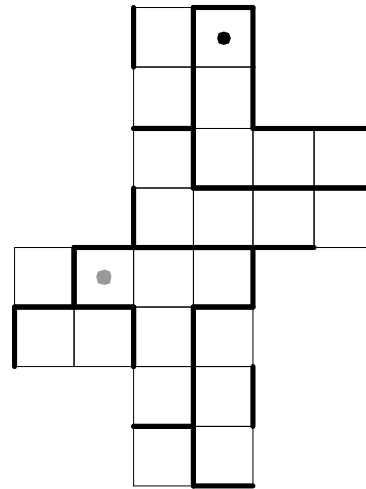
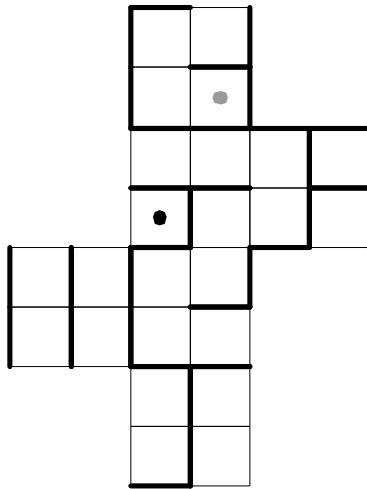
	12	70	
8			18
30			
		63	

	8	30	10
60			
40			

	6	35			
27				72	18
6			27	112	
	15		96	28	
		504			
			28		

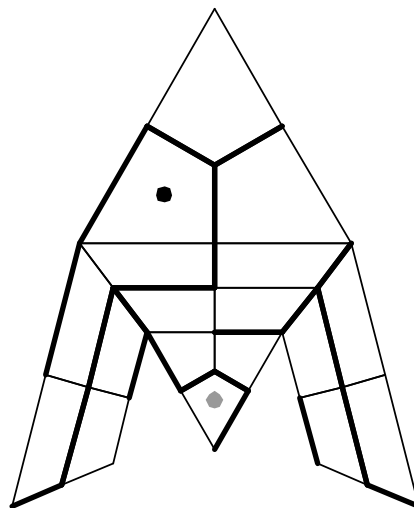
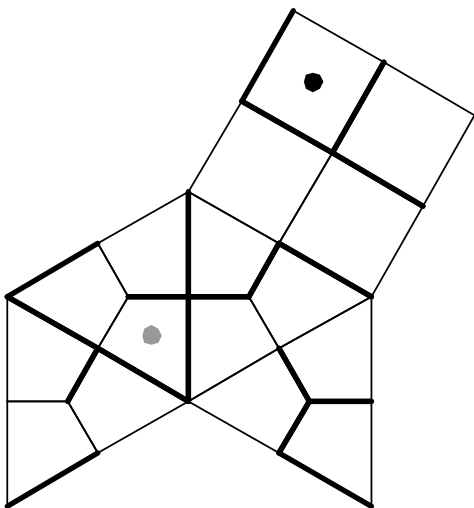
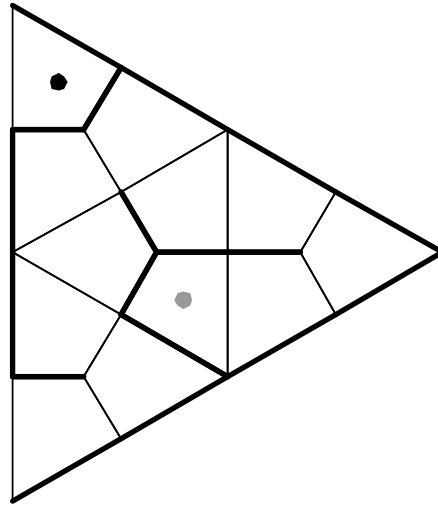
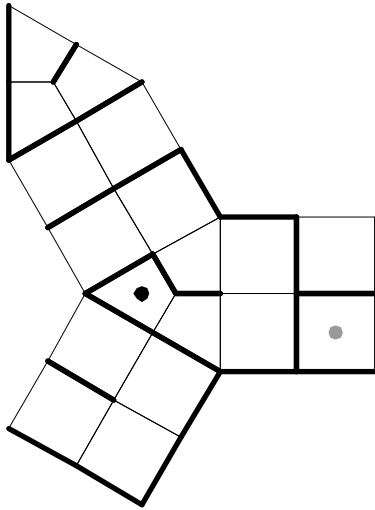
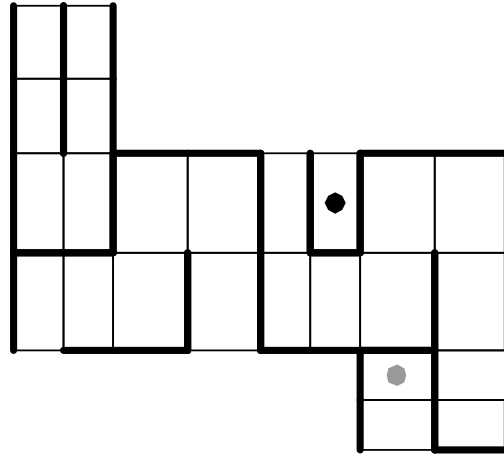
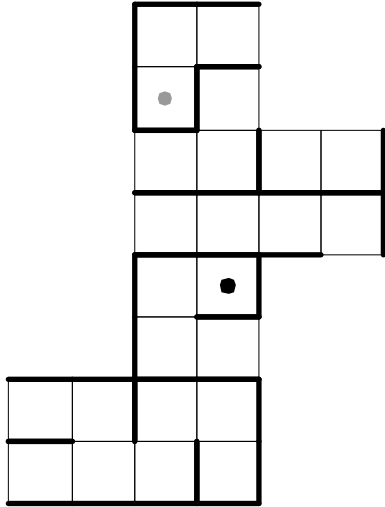
Labirint na kocki

Poveži točki na kocki:

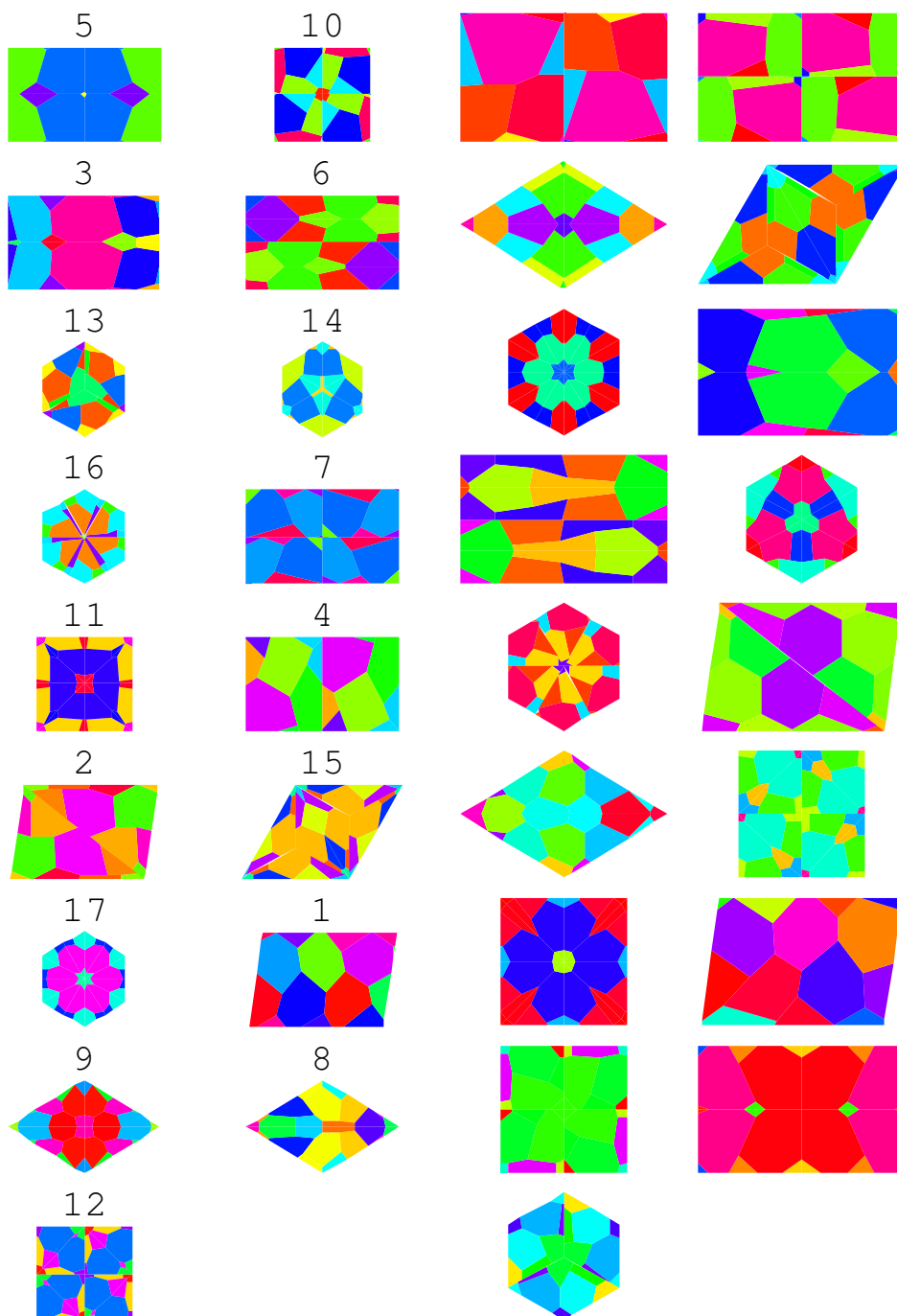


Labirinti na enostavnih poliedrih

Poveži točki na poliedru:

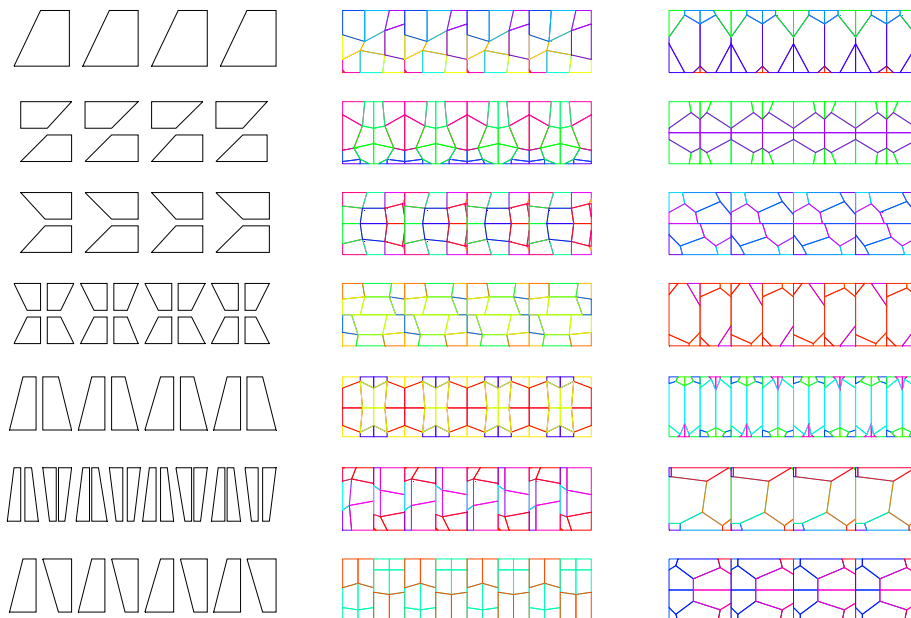


Poveži sličici, ki pripadata isti grupi

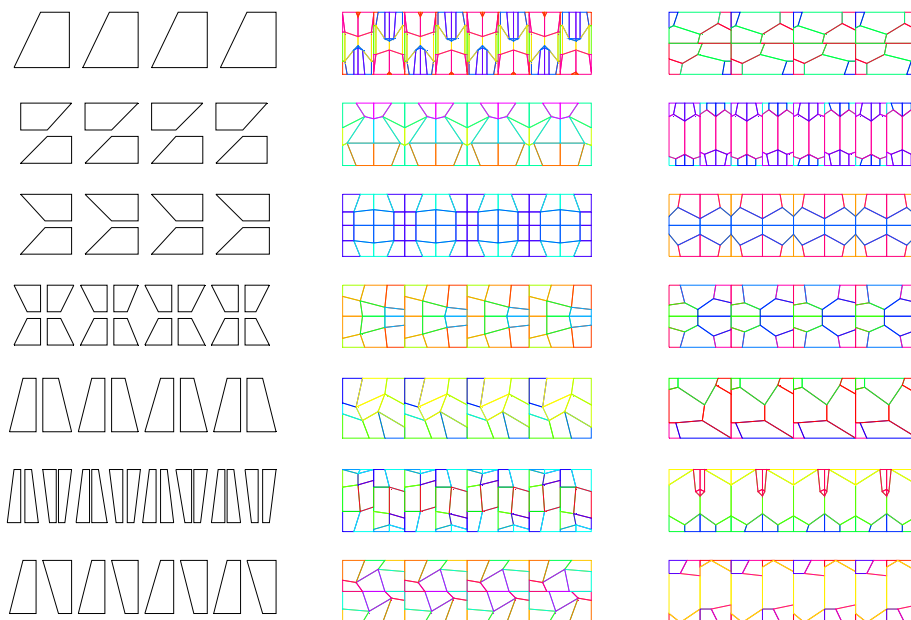


Poveži sličici, ki pripadata isti grupi

a)

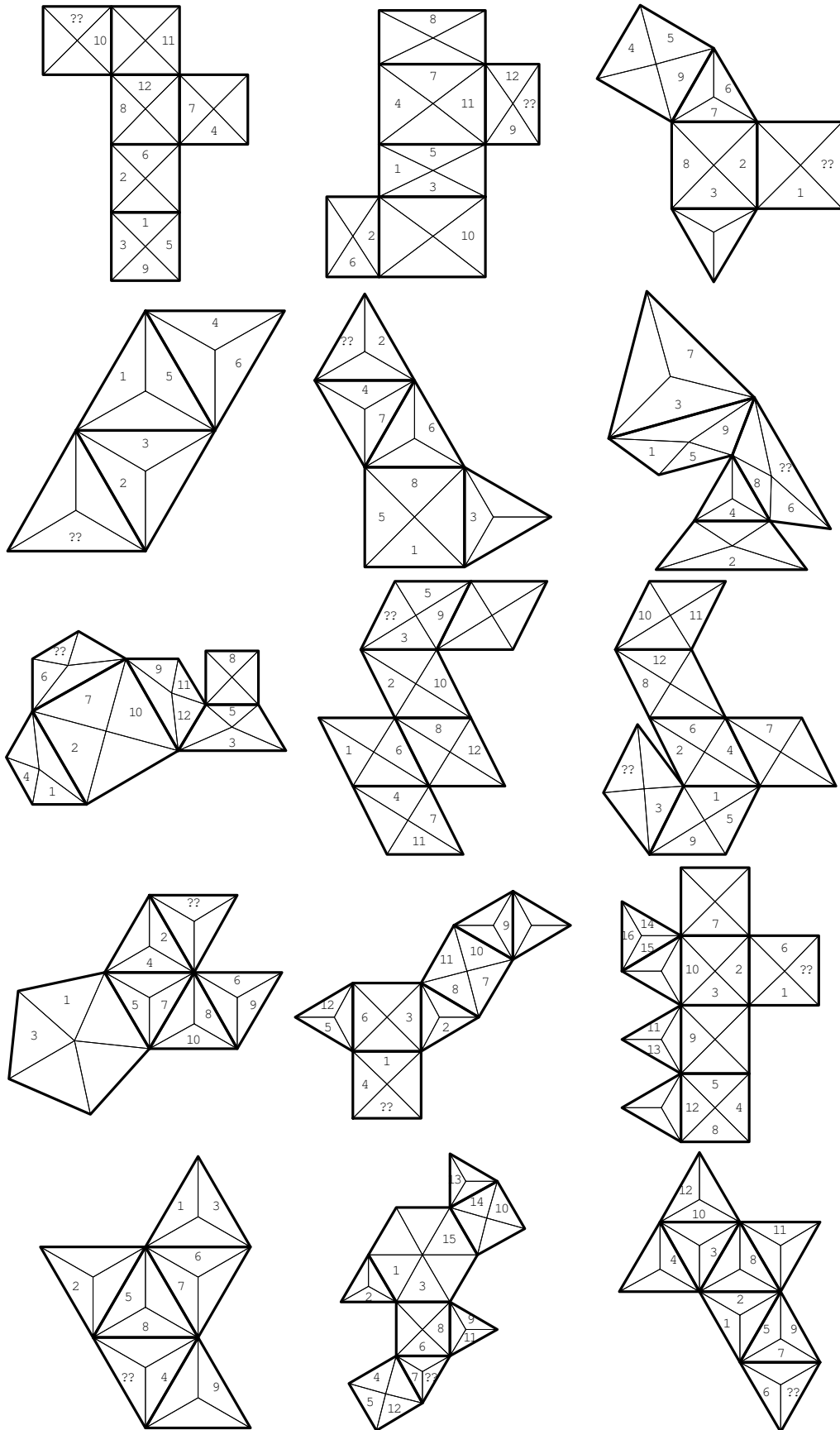


b)

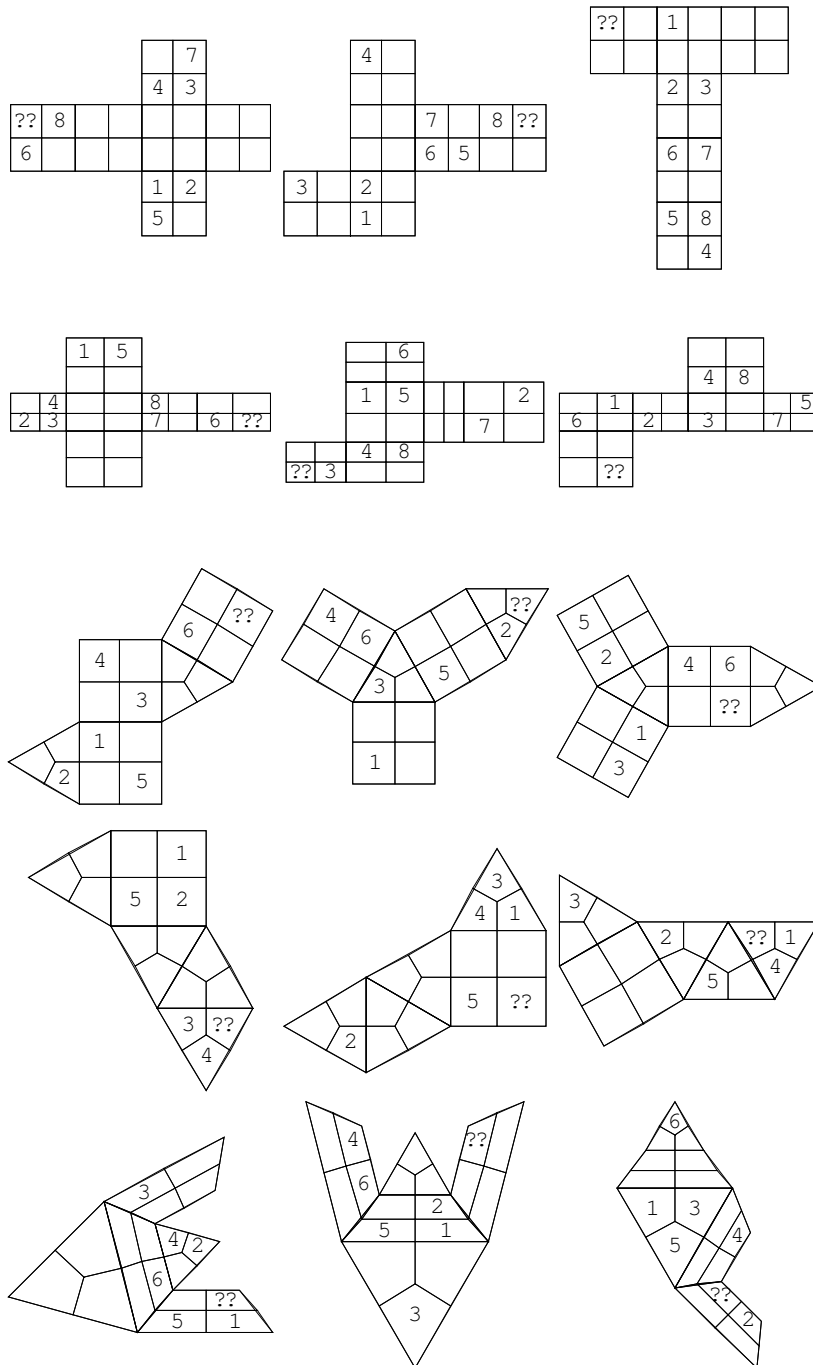


Prostorska predstavljivost

a) Katero število moramo vpisati na mesto znaka ??, da bosta stranici pripadali istemu robu poliedra?



b) Katero številko moramo vpisati na mesto znaka ??, da bosta oglišči pripadali istemu oglišču poliedra?



Imena likov

Dane so resničnostne vrednosti stavkov (R ali N). Poiškati je treba imena likov, ki so začetne črke v zaporedju A, B, C, D, E, ... Likji so treh oblik (trikotnik, kvadrat, petkotnik), treh velikosti (majhen, srednji, velik) in dveh barv (oranžen, zelen ali rumen).

1.

Določí razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. \neg Trikotnik (C)	R
2. Pod (A, C)	N
3. Manjši kot (A, C)	N

Določí razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. \neg Srednje v. (B)	R
2. Desno od (B, D)	N
3. Pod (A, C)	R
4. \neg Rumen (C) \wedge Oranžen (A)	R

Določí razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Rumen (B)	N
2. Nad (B, D)	R
3. Desno od (A, C)	R
4. Večji kot (C, D)	R

Določí razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Petkotnik (B)	R
2. Večji kot (A, E)	N
3. Pod (B, E)	N
4. Pod (C, D)	R
5. \neg Oranžen (B) \vee Srednje v. (E)	N

2.

Določi razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Lik C ni rumen.	R
2. Lik A je pod B.	N
3. Lik A je levo od B.	N

Določi razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Lik C je rumen.	R
2. Lik C je večji kot D.	N
3. Lik A je levo od C.	R
4. Lik C je zelen ali lik D ni trikotnik.	N

Določi razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Lik B ni srednje velikosti.	N
2. Lik A je levo od B.	N
3. Lik B je večji kot D.	N
4. Lik A je pod C.	N

Določi razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Lik E ni zelen.	N
2. Lik A je manjši kot D.	N
3. Lik B je večji kot C.	N
4. Lik C je nad D.	N
5. Če je lik B kvadrat, potem lik C ni petkotnik.	N

3.

Določi razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Lik C ni rumen.	R
2. Lik A je pod B.	N
3. Lik A je levo od B.	N

Določi razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Lik C je rumen.	R
2. Lik C je večji kot D.	N
3. Lik A je levo od C.	R
4. Lik C je zelen ali lik D ni trikotnik.	N

Določi razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Lik B ni srednje velikosti.	N
2. Lik A je levo od B.	N
3. Lik B je večji kot D.	N
4. Lik A je pod C.	N

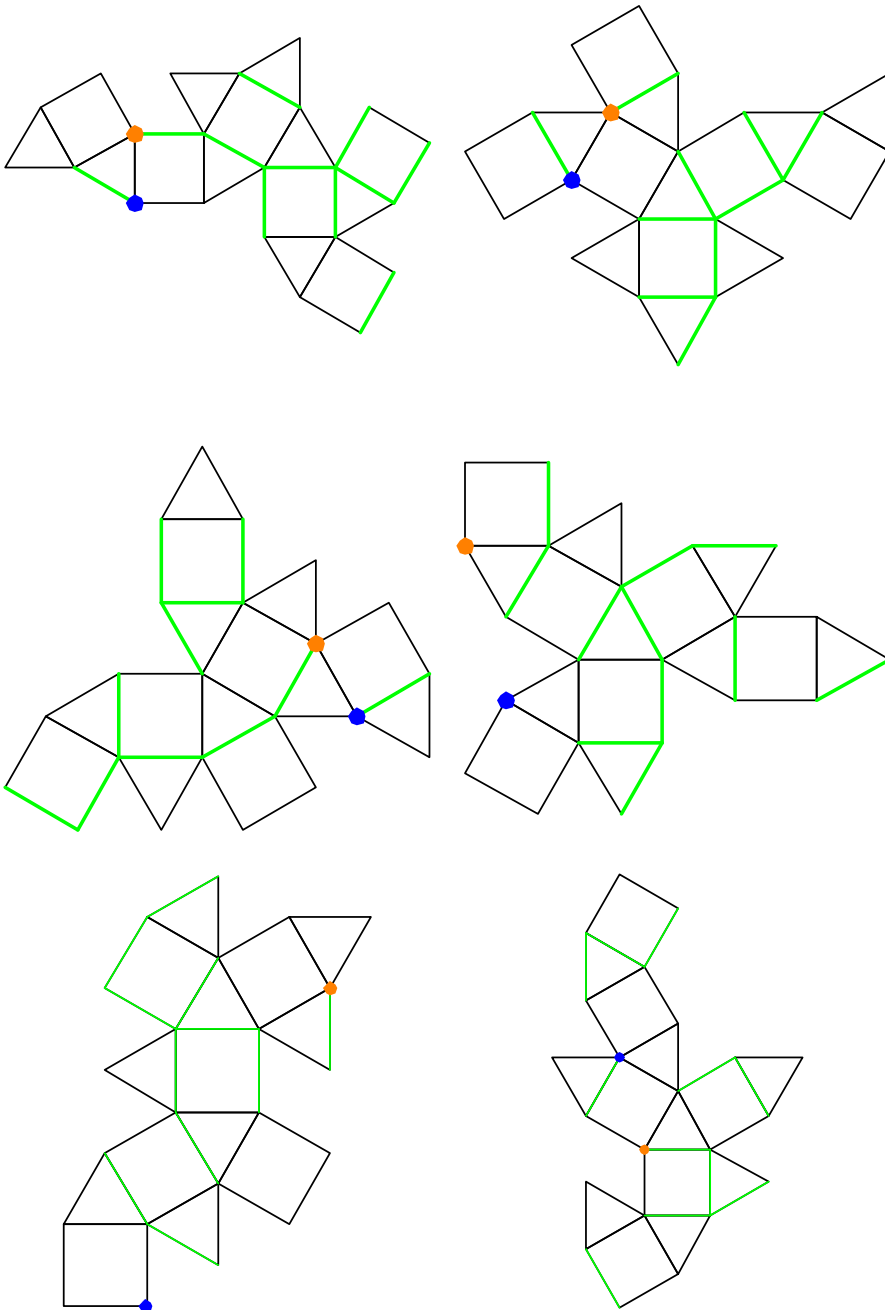
Določi razpored objektov in poišči najnižji stavek, ki je odvisen od ostalih !

1. Lik E ni zelen.	N
2. Lik A je manjši kot D.	N
3. Lik B je večji kot C.	N
4. Lik C je nad D.	N
5. Če je lik B kvadrat, potem lik C ni petkotnik.	N

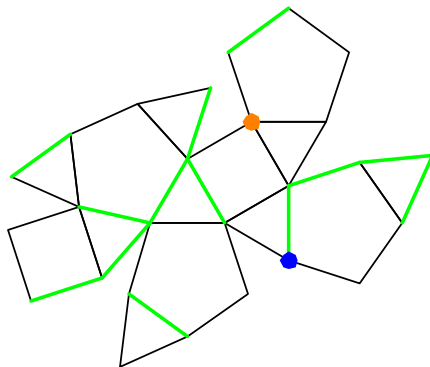
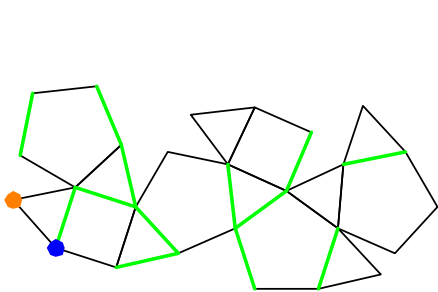
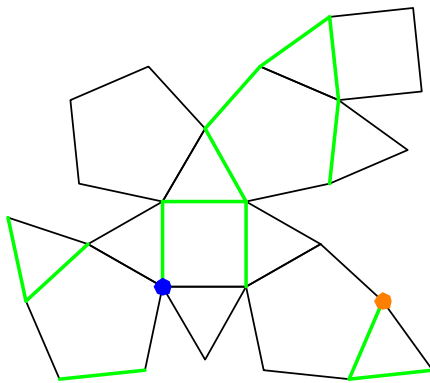
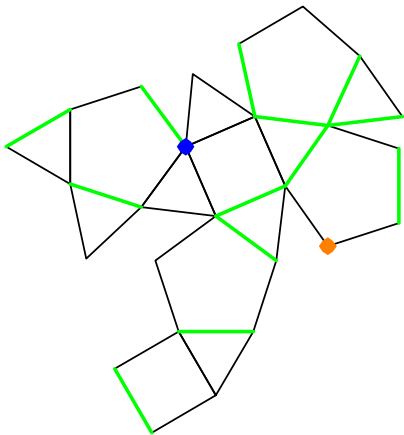
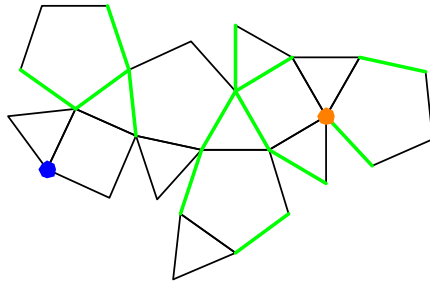
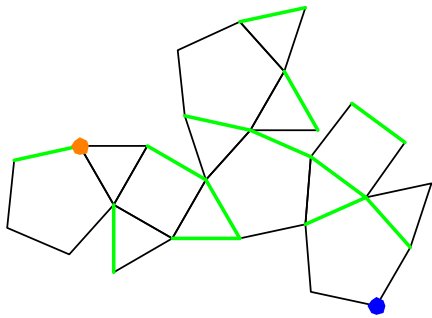
Labirinti na robovih poliedra

V naslednjih nalogah moramo povezati dve oglišči poliedra, ki je podan z mrežo. Poiskati moramo pot od modre do oranžne točke. Iz ene točke lahko gremo do druge točke, če je med njima zelena črta ali pa točki predstavljata isto oglišče poliedra.

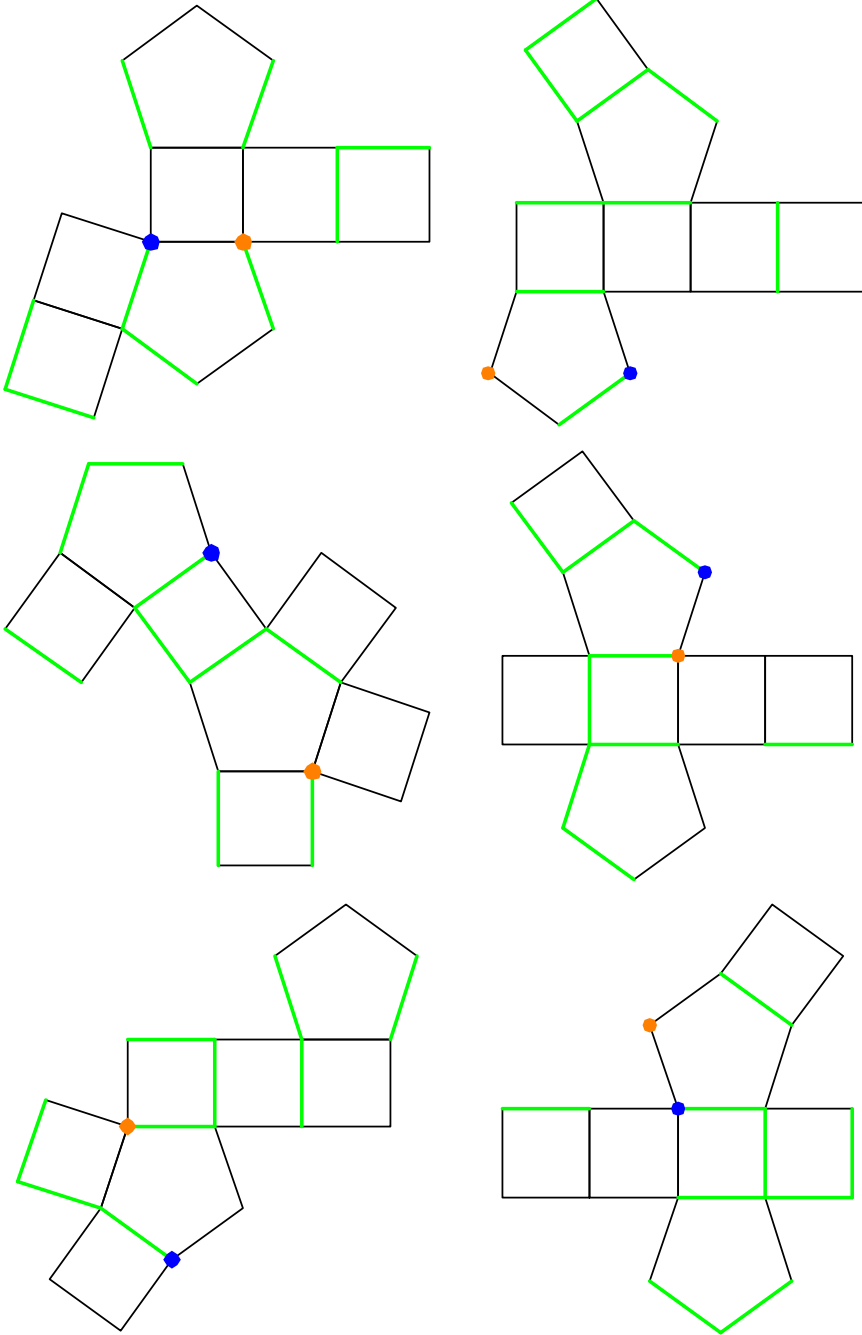
1.



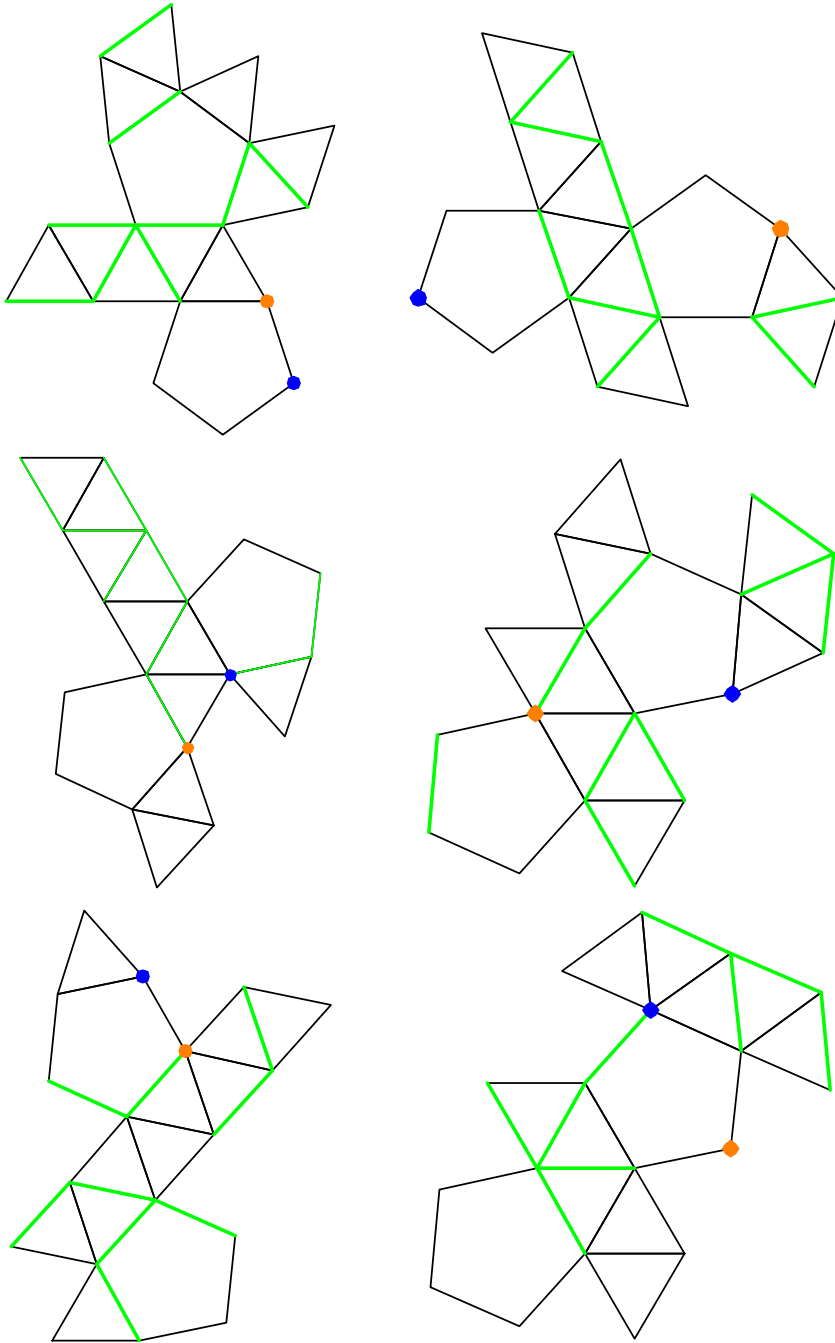
2.



3.

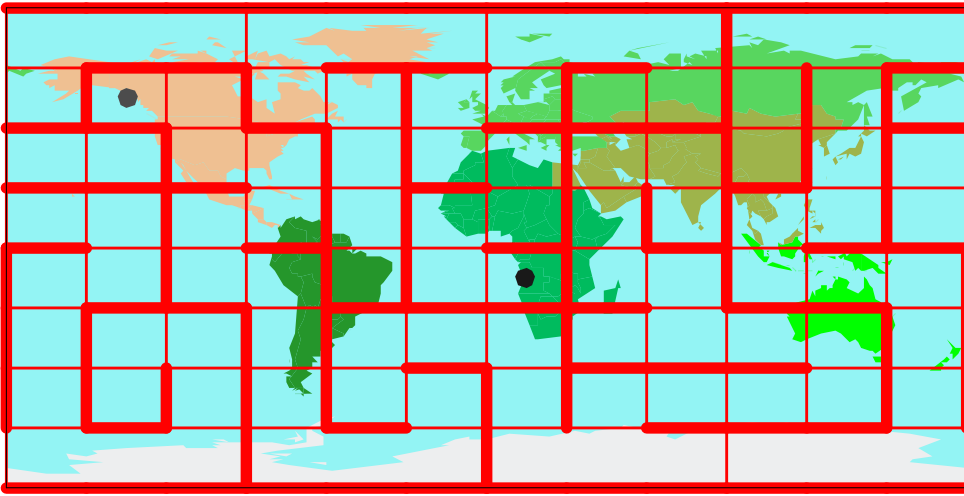


4.

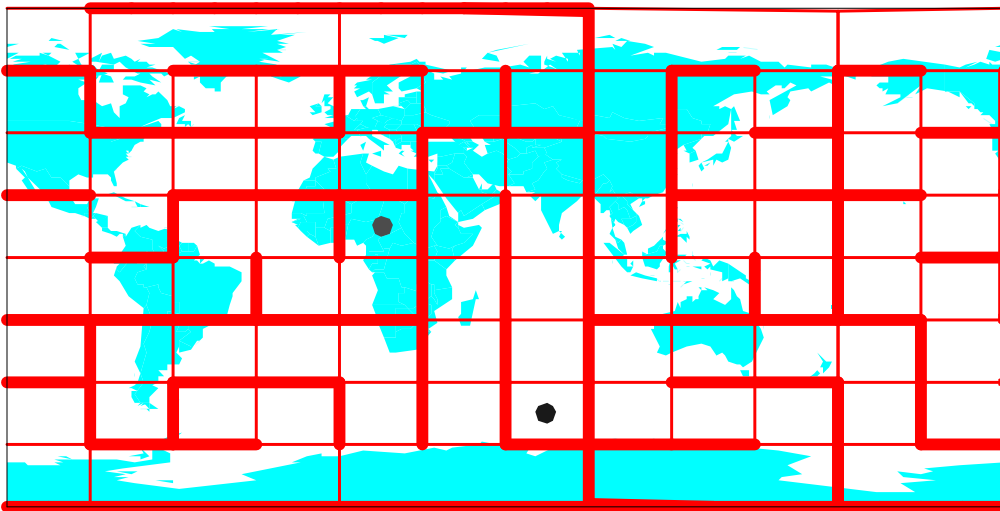


Labirinti na zemljevidu

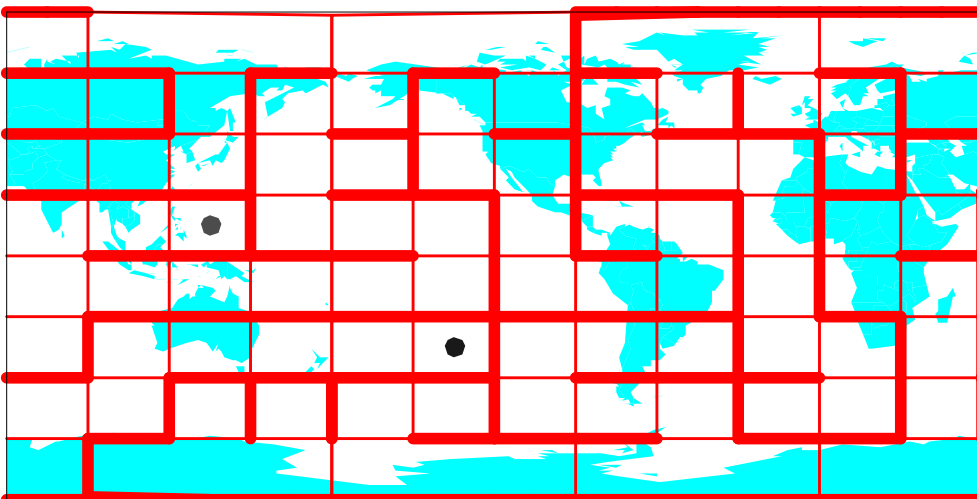
1.



2.



3.

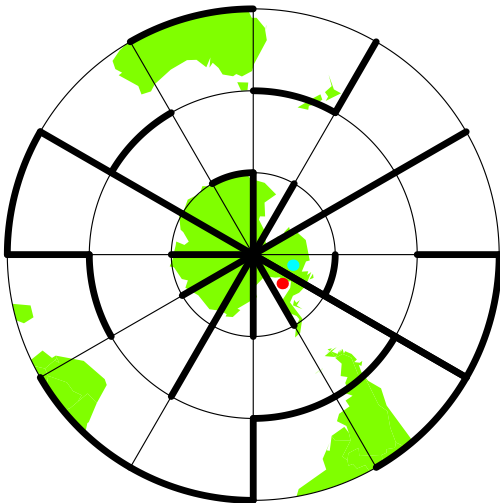


Večdelni labirinti na zemljevidu

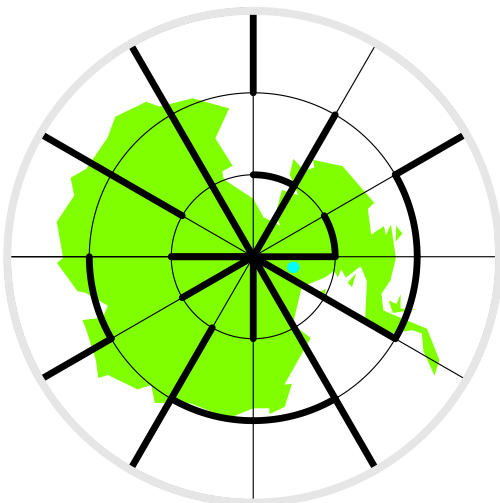
1.



2.

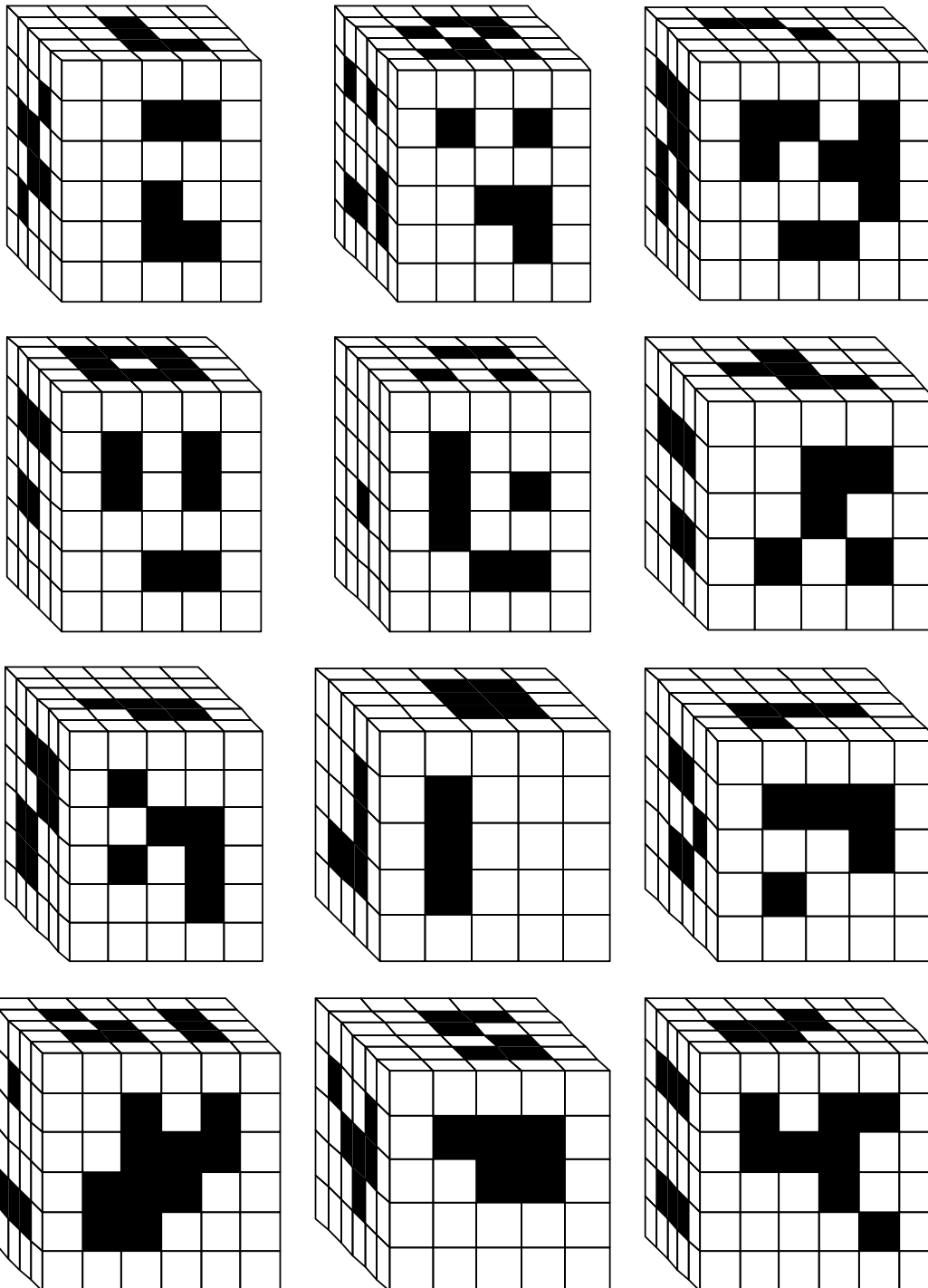


3.



Odstranjene kocke

Dan je kvader, ki sestoji iz kockic. Odstranimo vse kocke, ki so zaznamovane črno od vrha do dna, od leve do desne in od spredaj do zadaj. Koliko kock smo odstranili?



Nagradna logična naloga

Štirje prijatelji (Janez, Iztok, Miro, Janko) z različnimi priimki (Gorjak, Vrhovnik, Rop, Penko) imajo različne poklice (kemik, zdravnik, optik, trgovec).

Za vsakega ugotovi ime, priimek in poklic.

1. Gorjak ni ne trgovec ne kemik.
2. Rop ni ne trgovec ne kemik.
3. Janko je zdravnik.
4. Miro se ne piše Vrhovnik.
5. Iztok se ne piše Rop.
6. Gorjak ni po poklicu optik.
7. Iztok ni trgovec.
8. Vrhovnik ni po poklicu kemik.

	Gorjak	Vrhovnik	Rop	Penko	kemik	zdravnik	optik	trgovec
Janez								
Iztok								
Miro								
Janko								
kemik								
zdravnik								
optik								
trgovec								

ime	priimek	poklic
Janez		
Iztok		
Miro		
Janko		

Rešitev nagradne uganke pošljite do 15.5.2015 na naslov Logika d.o.o., Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik, s pripisom »Nagradna uganika«.

Naslednji reševalci nagradne uganke iz 3. številke bodo prejeli poševno prizmo:

A.V., Šmarje-Sap, A.Š. in N.S., Poljane nad Škofjo Loko, Ž.R., Ilirska Bistrica, K.B., Prem

Spletne tekmovanja iz logike in prostorske predstavljalivosti

Na spletni strani <http://olympiad.fe.uni-lj.si/Logika/> najdemo povezave na mednarodno, državno in šolska tekmovanja iz logike prek spleta. Praviloma so tekmovanja dostopna do 31. avgusta, vendar je v skladu s pravilnikom DMFA za ta tekmovanja najprej potrebna udeležba na šolskem, nato na državnem in nazadnje na mednarodnem tekmovanju. Za vsa tekmovanja je potrebna prijava, ki sestoji iz 8 mestnega gesla ter imena. Da se imena učencev ne bi pojavljala na spletu, priporočamo, da se na mesto imena uporablja psevdonim ali neka druga kombinacija števil in črk.

Vstopna stran za tekmovanja iz prostorske predstavljalivosti je <http://olympiad.fe.uni-lj.si/oly/>.

Kocki določi mrežo

Vsaki mreži na desni (večja mreža) določi mrežo iste kocke na levi.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Frobeniusova enačba z dvema neznankama

Frobeniusova enačba z dvema neznankama je diofantska enačba $ax+by=c$, kjer sta koeficienta a in b naravni števili, konstantni člen c pa je celo število, rešitve pa so nenegativna števila.

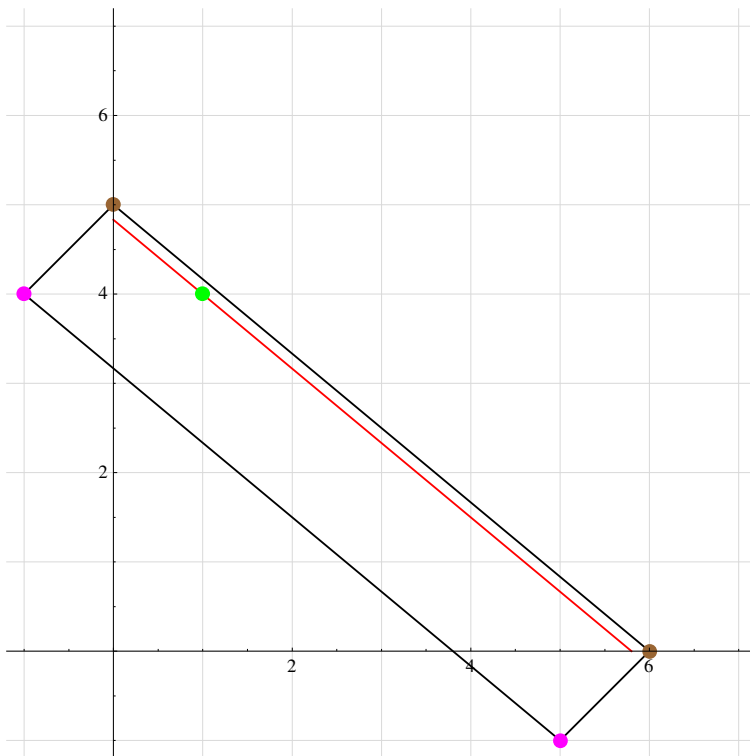
Največje število c , za katerega ta enačba nima samih nenegativnih rešitev, se imenuje *Frobeniusovo število* te enačbe te enačbe.

Dokazali bomo, da je Frobeniusovo število enačbe $ax+by=c$ enako $ab-a-b$, če sta a in b tuji števili. To je, enačba $ax+by=ab-a-b$ nima nenegativnih rešitev, enačba $ax+by=ab-a-b+e$ pa ima vsaj eno takšno rešitev, če je e naravno število.

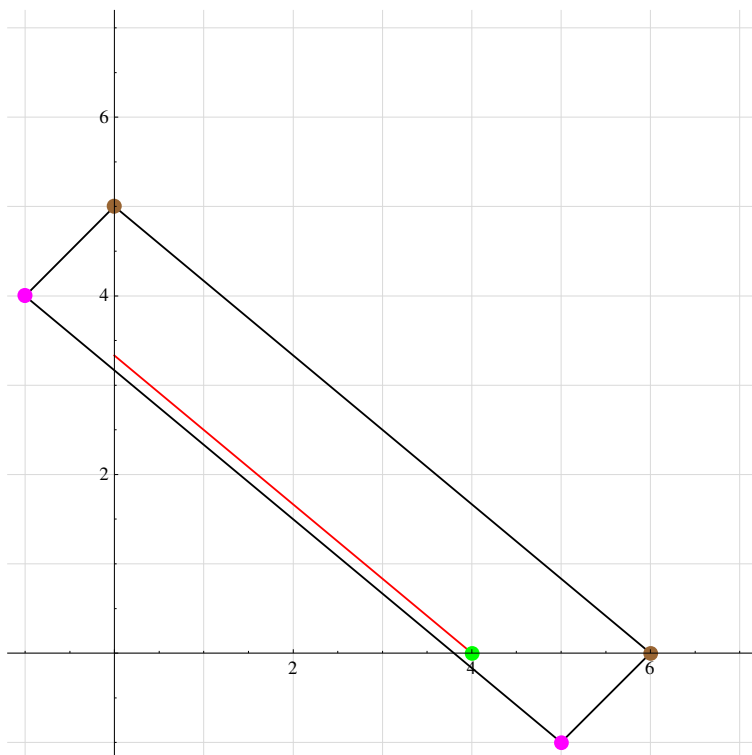
Primer: Imamo več znamk po 5 in 6 centov. Katera je največja poštnina, ki je ne moremo izraziti s temi znamkami. Rešitev: $30-5-6=19$.

Naslednja slika prikazuje: del premice z enačbo $5x+6y=30$ ali $x/6+y/5=1$, nenegativni rešitvi sta $(6, 0)$ in $(0, 5)$ in sta prikazani z rjavo barvo; del premice z enačbo $5x+6y=30-5-6$ ali $(x+1)/6+(y+1)/5=1$, rešitvi sta $(6-1, -1)$, $(5-1, -1)$ in sta prikazani z vijolično barvo. V obeh primerih gre za dve sosednji rešitvi. Torej druga enačba nima nenegativnih rešitev.

Enačba $5x+6y=30-1$ ali $x/(6-1/5)+y/(5-1/6)=1$ ima samo eno nenegativno rešitev $(1, 4)$.



Enako velja za enačbe $5x+6y=30-2, \dots, 5x+6y=30-10$. Zadnji primer prikazuje naslednja slika. Za vse te enačbe velja, da je razdalja med dvema sosednjima rešitvama enaka razdalji rjavih (vijoličnih) pik. Toda nobena od teh enačb nima rešitev, ki so hkrati v paralelogramu, ki ga določajo rjave in vijolične točke, izven prvega kvadranta. Torej morajo imeti rešitev v prvem kvadrantu. V nasprotnem bi bila razdalja med sosednjima rešitvama večja kot razdalja med rjavima točkama. Če preštejemo število točk s celimi koordinatami, ki so v notranjosti paralelograma, dobimo število 10. Vse te točke so v prvem kvadrantu in so nenegativne rešitve naših enačb.



Po Pickovem izreku dobimo ploščino konveksnega večkotnika, katerega oglišča imajo celoštevilске koordinate z izrazom

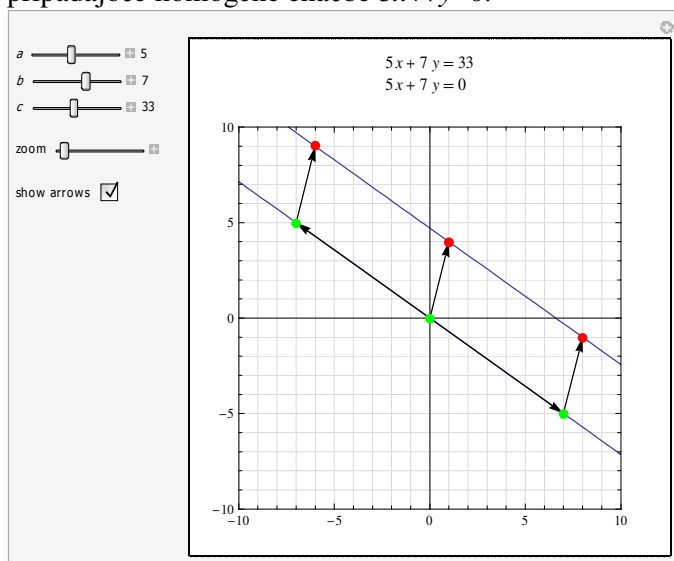
število notranjih točk + $\frac{1}{2}$ robnih točk - 1.

Upoštevamo samo točke s celoštevilskimi koordinatami.

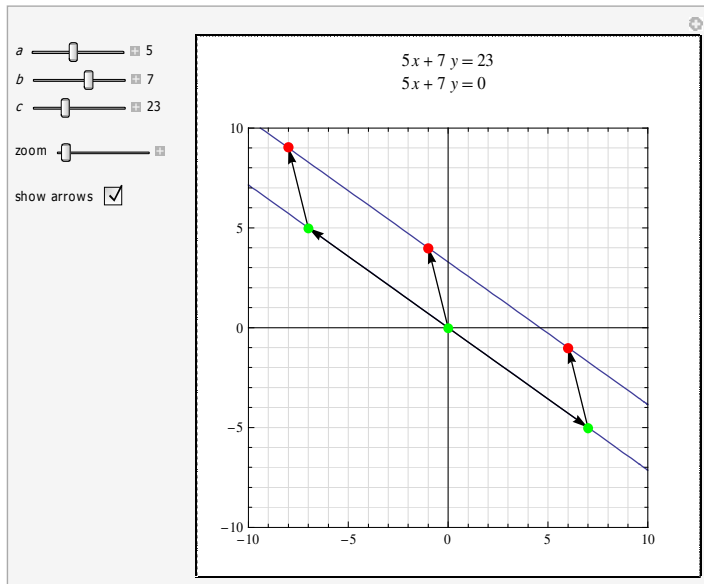
V našem primeru imamo: $10 + \frac{1}{2} \times 4 - 1 = 11 = 5 + 6$. Frobeniusovo število pa je $5 \times 6 - 5 - 6 = 19$.

Spomnimo se še enkrat, kako je s splošno diofantsko enačbo $ax + by = c$, kjer sta a in b tuji števili.

Homogena enačba $ax + by = 0$ ima splošno rešitev $k(-b, a)$, kjer je k poljubno celo število. Enačba $ax + by = c$ pa ima vedno rešitev. Če poznamo eno njeno rešitev (x_0, y_0) , se vsaka rešitev izraža kot $(x_0, y_0) + k(-b, a)$. Naslednja slika prikazuje nekaj zaporednih rešitev enačbe $5x + 7y = 30$ in pripadajoče homogene enačbe $5x + 7y = 0$.



Zdaj pa pogledaj še enačbo $5x + 7y = 35 - 5 - 7 = 23$ in pripadajočo enačbo $5x + 7y = 0$.



Vzemimo, da sta a in b tuji naravni števili. Diofantska enačba $ax+by=ab$, oziroma $x/b+y/a=1$ ima splošno rešitev $(b, 0)+k(-b, a)$ in natanko dve nenegativni rešitvi $(b, 0)$ in $(0, a)$. Diofantska enačba $ax+by=ab-a-b$, oziroma $(x+1)/b+(y+1)/a=1$ ima rešitev $(b-1, -1)$ $(-1, a-1)$ in zato splošno rešitev $(b-1, -1)+k(-b, a)$, vendar nima nenegativnih rešitev. Vsaka druga enačba $ax+by=ab-d$ ima natanko eno nenegativno rešitev, če je d enako $1, 2, \dots, a+b-1$. Premice, ki ustrezajo tem enačbam ležijo med obema prej omenjenima premicama in morajo imeti natanko eno rešitev znotraj paralelograma, ki ga določata zgornji premici. Namreč, na samem robu ni drugih celoštevilskih rešitev in če ne bi imeli rešitve, bi bila razdalja med dvema zaporednima rešitvama večja od razdalje med točkama $(b, 0)$ in $(0, a)$. Ta razdalja je $\sqrt{a^2+b^2}$.

Ploščino omenjenega paralelograma lahko izračunamo tudi s pomočjo determinate, oziroma vektorskega produkta vektorjev $(1, 1)$ in $(-b, a)$. To nam da $a+b$. Točk, ki so znotraj paralelograma je $a+b-1/2 \times 4+1=a+b-1$. toliko pa je tudi enačb $ax+by=ab-d$, če je d enako $1, 2, \dots, a+b-1$. Če pa je $d=ab-a-b$, enačba nima nenegativnih rešitev. Torej je $ab-a-b$ Fröbeniusovo število enačbe $ax+by=c$.

Reference:

[1] [Weisstein, Eric W.](http://mathworld.wolfram.com/FrobeniusEquation.html) "Frobenius Equation." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/FrobeniusEquation.html>

[2] [Weisstein, Eric W.](http://mathworld.wolfram.com/FrobeniusNumber.html) "Frobenius Number." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/FrobeniusNumber.html>

[3] "[Linear Diophantine Equations in Two Variables](http://demonstrations.wolfram.com/LinearDiophantineEquationsInTwoVariables/)" <http://demonstrations.wolfram.com/LinearDiophantineEquationsInTwoVariables/>

[4] "Frobenius Equation in Two Variables" <http://demonstrations.wolfram.com/FrobeniusEquationInTwoVariables/>

Diofantska enačba $ax+by=cz$

Proizvajalec pošilja trgovini enake kroglice v vrečkah dveh velikosti. V enih je natančno a kroglic, v drugih pa natančno b kroglic. Trgovina bo prodajala vrečke z c kroglicami. Kako naj trgovina naroči vrečke s kroglicami, tako da po ponovnem pakiranju ne bo ostala nobena kroglica.

Rešiti moramo enačbo

$$ax+by=cz$$

v nenegativnih celih številih. Takšni enačbi pravimo *diofantska* enačba po grškem matematiku Diofantu. Ker pa nima konstantnega člena je to *homogena* enačba. Homogena enačba ima vedno rešitev $x=0, y=0, z=0$. Tej rešitvi pravimo *trivialna* in nas ponavadi ne zanima. Vemo pa, da ima diofantska enačba $ax+by=c$ vedno rešitev, če sta a in b tuji števili. To bomo tudi predpostavili. Če sta a, b in c naravna števila, potem ima enačba $ax+by=cz$ zanesljivo tudi nenegativne rešitve, samo cz mora biti dovolj velik.

Recimo, da imamo kemijsko reakcijo, v kateri iz molekul A_5 in A_7 dobimo molekulo A_9 . Enačba se zdaj glasi $xA_5+yA_7=zA_9$, to je, $5x+7y=9z$. Iščemo pa najmanjše naravno število z , ki reši enačbo.

Po Eulerju to enačbo rešujemo takole:

$$5x = -7y+9z, x = (-7y+9z)/5 = -y+2z+(-2y-z)/5.$$

Pri tem smo vzeli $9/5=2-1/5$ in ne $9/5=1+4/5$, tako da je ostanek čim manjši.

Število $w=(-2y-z)/5$ mora biti celo število, $5w = -2y-z$. Izračunamo $z = -2y-5w$. Tako smo dobili z .

Izračunamo še $x = -y+2z+(-2y-z)/5, x = -y+2z+w = -5y-9w$. Ker je y nenegativno število, mora biti w negativno ali 0. Najmanjša rešitev glede na z je $w = -1, y=0, x=9, z=5$ ali $y=1, w=-1, x=4, z=3$ ali $y=3, w=-2, x=3, z=4$. Torej $z=3, y=1, x=4$.

Enačba $5x+7y=35$ ima dve nenegativni rešitvi: $(7, 0)$ in $(0, 5)$. Enačba $5x+7y=35-5-7=23$ pa nima nobene nenegativne rešitve. Enačba $5x+7y=c$ ima eno samo nenegativno rešitev, če je c 24, 25 in 26. Torej je $z=3, x=4, y=1$ res rešitev z najmanjšim z .

Vemo, da ima enačba $ax+by=cz$ zanesljivo nenegativne rešitve, če je število cz večje od Fröbeniusovega števila enačbe, to pa je $ab-a-b$. To število je odvisno samo od a in b . Za enačbo $5x+7y=9z$ je to $35-5-7=23$. Torej ima naša enačba zanesljivo nenegativno rešitev pri $z=3$. Ker je $3 \times 9 = 27 < 35$ je ta rešitev ena sama. To, da enačba $5x+7y=23$ nima nenegativnih rešitev, še ne pomeni, da $5x+7y=18$ nima takšnih rešitev. Tedaj se $z = -2y-5w$ glasi $2 = -2y-5w$. Pogoji $x = -5y-9w \geq 0$ da $-9/5 w \geq y, -2y \geq 18/5 w$. Potem je $2 \geq 18/5 w-5w = -7/5 w$. Število w je lahko le 0 ali -1. Če je $w=0$, iz $2=-2y$ dobimo $y=-1$, kar ni nenegativno število. Če je $w=-1$, imamo $2=-2y+5, y=3/2$, kar ni celo število.

Še bolj enostavno je, tabelirati vrednosti za $5x+7y$, ki ne presegajo 18. Za x smemo vzeti le 0, 1, 2 in 3; za y pa 0, 1, 2.

	0	1	2
0	0	7	14
1	5	12	19
2	10	17	24
3	15	22	29

Vidimo, da tudi $5x+7y=9$ nima nenegativnih rešitev.

Pri majhnih koeficientih je morda celo lažje tabelirati vrednosti za $5x+7y$, kot pa reševati enačbo z Eulerjevim postopkom. V našem primeru iščemo najmanjši večkratnik števila 9, ki je oblike $5x+7y$. Vemo, da ga bomo dobili, če najprej poiščemo večkratni, ki je večji od $35-5-7=23$, to je od Fröbeniusovega števila. To je 3 krat 9, to je 27. Zato tabeliramo vrednosti $5x+7y$ za x od 0 do 5 in za y od 0 do 3. Pa še to vpisujemo le vrednosti do 27. Ko se začnejo pojavljati večje vrednosti, prenehamo.

	0	1	2	3
0	0	7	14	21
1	5	12	19	26
2	10	17	24	31
3	15	22	29	
4	20	27		
5	25	32		

Rešitev preberemo iz tabele: $x=4$, $y=1$, $z=3$.

Če je koeficient $c > ab - a - b$, potem ima enačba $ax + by = cz$ rešitev $z=1$.

Primeri za Eulerjevo metodo reševanja diofantskih enačb

$3x + 5y = 13$	$x = 4 - y + \left(\frac{1}{3}(1 - 2y)\right)$	$z = \frac{1}{3}(1 - 2y)$	<table border="1"> <tr><td>$x = 6 - 5s$</td></tr> <tr><td>$y = -1 + 3s$</td></tr> <tr><td>$z = 1 - 2s$</td></tr> </table>	$x = 6 - 5s$	$y = -1 + 3s$	$z = 1 - 2s$
$x = 6 - 5s$						
$y = -1 + 3s$						
$z = 1 - 2s$						
$2y + 3z = 1$	$y = -z + \left(\frac{1-z}{2}\right)$	$s = \frac{1-z}{2}$				
$z + 2s = 1$	$z = 1 - 2s$					

$3x + 5y = 16$	$x = 5 - y + \left(\frac{1}{3}(1 - 2y)\right)$	$z = \frac{1}{3}(1 - 2y)$	<table border="1"> <tr><td>$x = 7 - 5s$</td></tr> <tr><td>$y = -1 + 3s$</td></tr> <tr><td>$z = 1 - 2s$</td></tr> </table>	$x = 7 - 5s$	$y = -1 + 3s$	$z = 1 - 2s$
$x = 7 - 5s$						
$y = -1 + 3s$						
$z = 1 - 2s$						
$2y + 3z = 1$	$y = -z + \left(\frac{1-z}{2}\right)$	$s = \frac{1-z}{2}$				
$z + 2s = 1$	$z = 1 - 2s$					

$5x + 8y = 28$	$x = 5 - y + \left(\frac{1}{5}(3 - 3y)\right)$	$z = \frac{1}{5}(3 - 3y)$	<table border="1"> <tr><td>$x = 4 + 8t$</td></tr> <tr><td>$y = 1 - 5t$</td></tr> <tr><td>$z = 3t$</td></tr> <tr><td>$s = -2t$</td></tr> </table>	$x = 4 + 8t$	$y = 1 - 5t$	$z = 3t$	$s = -2t$
$x = 4 + 8t$							
$y = 1 - 5t$							
$z = 3t$							
$s = -2t$							
$3y + 5z = 3$	$y = 1 - z + \left(-\frac{2z}{3}\right)$	$s = -\frac{2z}{3}$					
$2z + 3s = 0$	$z = -s + \left(-\frac{s}{2}\right)$	$t = -\frac{s}{2}$					
$s + 2t = 0$	$s = -2t$						

$8x + 11y = 29$	$x = 3 - y + \left(\frac{1}{8}(5 - 3y)\right)$	$z = \frac{1}{8}(5 - 3y)$	<table border="1"> <tr><td>$x = 5 + 11t$</td></tr> <tr><td>$y = -1 - 8t$</td></tr> <tr><td>$z = 1 + 3t$</td></tr> <tr><td>$s = -2t$</td></tr> </table>	$x = 5 + 11t$	$y = -1 - 8t$	$z = 1 + 3t$	$s = -2t$
$x = 5 + 11t$							
$y = -1 - 8t$							
$z = 1 + 3t$							
$s = -2t$							
$3y + 8z = 5$	$y = 1 - z + \left(\frac{1}{3}(2 - 2z)\right)$	$s = \frac{1}{3}(2 - 2z)$					
$2z + 3s = 2$	$z = 1 - s + \left(-\frac{s}{2}\right)$	$t = -\frac{s}{2}$					
$s + 2t = 0$	$s = -2t$						

[Izidor Hafner](#)

"Euler's Method for Solving Linear Diophantine Equations"

<http://demonstrations.wolfram.com/EulersMethodForSolvingLinearDiophantineEquations/WolframDemonstrationsProject>

Enačbe, podobne kemijskim z enim atomom

Dana je kemijska enačba in pripadajoča diofantska enačba $ax+by=cz$, ki jo obravnavamo kot Fröbeniusovo enačbo $ax+by=e$, to je, iščemo nenegativne rešitve te enačbe. Naravni števili a in b sta tuji. Največje število, za katerega enačba $ax+by=e$, nima nenegativnih rešitev, je $ab-a-b$, se imenuje Fröbeniusovo število. Seveda pa se lahko zgodi, da ima enačba nenegativne rešitve tudi pri številih, ki so manjša od Fröbeniusovega števila (f). Zato je najlažje enačbo rešiti s tabeliranjem izraza $ax+by$. Dovolj je, da to naredimo samo do vrednosti ab . Pri kemijskih enačbah iščemo najmanjše število z . Poiščemo prvi večkratnik števila c , za katerega ima enačba nenegativne rešitve. Če je $c > ab - a - b$, je $z=1$.

$x\text{A}_2 + y\text{A}_3 = z\text{A}_4$ $2x + 3y = 4z$ $f=1$ <table border="1"> <tr><td>$\{x, y\}$</td><td>z</td></tr> <tr><td>$\{(2, 0)\}$</td><td>1</td></tr> </table>	$\{x, y\}$	z	$\{(2, 0)\}$	1	$2x+3y$ <table border="1"> <tr><td>$x \setminus y$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>10</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td></tr> </table>	$x \setminus y$	0	1	2	0	0	3	6	1	2	5	8	2	4	7	10	3	6	9	12
$\{x, y\}$	z																								
$\{(2, 0)\}$	1																								
$x \setminus y$	0	1	2																						
0	0	3	6																						
1	2	5	8																						
2	4	7	10																						
3	6	9	12																						

$x\text{A}_2 + y\text{A}_3 = z\text{A}_6$ $2x + 3y = 6z$ $f=1$ <table border="1"> <tr><td>$\{x, y\}$</td><td>z</td></tr> <tr><td>$\{(0, 2), (3, 0)\}$</td><td>1</td></tr> </table>	$\{x, y\}$	z	$\{(0, 2), (3, 0)\}$	1	$2x+3y$ <table border="1"> <tr><td>$x \setminus y$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>10</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td></tr> </table>	$x \setminus y$	0	1	2	0	0	3	6	1	2	5	8	2	4	7	10	3	6	9	12
$\{x, y\}$	z																								
$\{(0, 2), (3, 0)\}$	1																								
$x \setminus y$	0	1	2																						
0	0	3	6																						
1	2	5	8																						
2	4	7	10																						
3	6	9	12																						

$x\text{A}_2 + y\text{A}_5 = z\text{A}_7$ $2x + 5y = 7z$ $f=3$ <table border="1"> <tr><td>$\{x, y\}$</td><td>z</td></tr> <tr><td>$\{(1, 1)\}$</td><td>1</td></tr> </table>	$\{x, y\}$	z	$\{(1, 1)\}$	1	$2x+5y$ <table border="1"> <tr><td>$x \setminus y$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>12</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>9</td><td>14</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>11</td><td>16</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>13</td><td>18</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr> </table>	$x \setminus y$	0	1	2	0	0	5	10	1	2	7	12	2	4	9	14	3	6	11	16	4	8	13	18	5	10	15	20
$\{x, y\}$	z																																
$\{(1, 1)\}$	1																																
$x \setminus y$	0	1	2																														
0	0	5	10																														
1	2	7	12																														
2	4	9	14																														
3	6	11	16																														
4	8	13	18																														
5	10	15	20																														

$x\text{A}_2 + y\text{A}_5 = z\text{A}_9$ $2x + 5y = 9z$ $f=3$ <table border="1"> <tr><td>$\{x, y\}$</td><td>z</td></tr> <tr><td>$\{(2, 1)\}$</td><td>1</td></tr> </table>	$\{x, y\}$	z	$\{(2, 1)\}$	1	$2x+5y$ <table border="1"> <tr><td>$x \setminus y$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>12</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>9</td><td>14</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>11</td><td>16</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>13</td><td>18</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr> </table>	$x \setminus y$	0	1	2	0	0	5	10	1	2	7	12	2	4	9	14	3	6	11	16	4	8	13	18	5	10	15	20
$\{x, y\}$	z																																
$\{(2, 1)\}$	1																																
$x \setminus y$	0	1	2																														
0	0	5	10																														
1	2	7	12																														
2	4	9	14																														
3	6	11	16																														
4	8	13	18																														
5	10	15	20																														

$x\text{A}_3 + y\text{A}_7 = z\text{A}_8$ $3x + 7y = 8z$ $f=11$ <table border="1"> <tr><td>$\{x, y\}$</td><td>z</td></tr> <tr><td>$\{\}$</td><td>1</td></tr> <tr><td>$\{(3, 1)\}$</td><td>2</td></tr> </table>	$\{x, y\}$	z	$\{\}$	1	$\{(3, 1)\}$	2	$3x+7y$ <table border="1"> <tr><td>$x \setminus y$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>7</td><td>14</td><td>21</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>10</td><td>17</td><td>24</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>13</td><td>20</td><td>27</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>16</td><td>23</td><td>30</td></tr> <tr><td>4</td><td>12</td><td>19</td><td>26</td><td>33</td></tr> <tr><td>5</td><td>15</td><td>22</td><td>29</td><td>36</td></tr> <tr><td>6</td><td>18</td><td>25</td><td>32</td><td>39</td></tr> <tr><td>7</td><td>21</td><td>28</td><td>35</td><td>42</td></tr> </table>	$x \setminus y$	0	1	2	3	0	0	7	14	21	1	3	10	17	24	2	6	13	20	27	3	9	16	23	30	4	12	19	26	33	5	15	22	29	36	6	18	25	32	39	7	21	28	35	42
$\{x, y\}$	z																																																			
$\{\}$	1																																																			
$\{(3, 1)\}$	2																																																			
$x \setminus y$	0	1	2	3																																																
0	0	7	14	21																																																
1	3	10	17	24																																																
2	6	13	20	27																																																
3	9	16	23	30																																																
4	12	19	26	33																																																
5	15	22	29	36																																																
6	18	25	32	39																																																
7	21	28	35	42																																																

$x\text{A}_5 + y\text{A}_8 = z\text{A}_9$ $5x + 8y = 9z$ $f=27$ <table border="1"> <tr><td>$\{x, y\}$</td><td>z</td></tr> <tr><td>$\{\}$</td><td>1</td></tr> <tr><td>$\{(2, 1)\}$</td><td>2</td></tr> <tr><td>$\{\}$</td><td>3</td></tr> <tr><td>$\{(4, 2)\}$</td><td>4</td></tr> </table>	$\{x, y\}$	z	$\{\}$	1	$\{(2, 1)\}$	2	$\{\}$	3	$\{(4, 2)\}$	4	$5x+8y$ <table border="1"> <tr><td>$x \setminus y$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td>16</td><td>24</td><td>32</td><td>40</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>13</td><td>21</td><td>29</td><td>37</td><td>45</td></tr> <tr><td>2</td><td>10</td><td>18</td><td>26</td><td>34</td><td>42</td><td>50</td></tr> <tr><td>3</td><td>15</td><td>23</td><td>31</td><td>39</td><td>47</td><td>55</td></tr> <tr><td>4</td><td>20</td><td>28</td><td>36</td><td>44</td><td>52</td><td>60</td></tr> <tr><td>5</td><td>25</td><td>33</td><td>41</td><td>49</td><td>57</td><td>65</td></tr> <tr><td>6</td><td>30</td><td>38</td><td>46</td><td>54</td><td>62</td><td>70</td></tr> <tr><td>7</td><td>35</td><td>43</td><td>51</td><td>59</td><td>67</td><td>75</td></tr> <tr><td>8</td><td>40</td><td>48</td><td>56</td><td>64</td><td>72</td><td>80</td></tr> </table>	$x \setminus y$	0	1	2	3	4	5	0	0	8	16	24	32	40	1	5	13	21	29	37	45	2	10	18	26	34	42	50	3	15	23	31	39	47	55	4	20	28	36	44	52	60	5	25	33	41	49	57	65	6	30	38	46	54	62	70	7	35	43	51	59	67	75	8	40	48	56	64	72	80
$\{x, y\}$	z																																																																																
$\{\}$	1																																																																																
$\{(2, 1)\}$	2																																																																																
$\{\}$	3																																																																																
$\{(4, 2)\}$	4																																																																																
$x \setminus y$	0	1	2	3	4	5																																																																											
0	0	8	16	24	32	40																																																																											
1	5	13	21	29	37	45																																																																											
2	10	18	26	34	42	50																																																																											
3	15	23	31	39	47	55																																																																											
4	20	28	36	44	52	60																																																																											
5	25	33	41	49	57	65																																																																											
6	30	38	46	54	62	70																																																																											
7	35	43	51	59	67	75																																																																											
8	40	48	56	64	72	80																																																																											

"Balancing Abstract Chemical Equations with One Kind of Atom"

<http://demonstrations.wolfram.com/BalancingAbstractChemicalEquationsWithOneKindOfAtom/>

Abstraktne kemijske enačbe

V naslednjih enačbah črke A, B, C, ... predstavljajo različne atome, indeksi pa število atomov v molekuli. Število atomov posamezne vrste mora biti enako na levi in desni strani enačbe. Zanima nas rešitev s čim manjšim številom molekul. Vsaka takšna enačba pomeni toliko diofantskih enačb, kot je število različnih atomov. Število neznank je enako številu molekul. Dobimo homogen sistem enačb, ki ima vedno trivialno rešitev (samo ničle). Vendar nas zanima rešitev z majhnimi naravnimi števili.

V naslednjih okvirjih imamo abstraktno kemijsko enačbo, pripadajoči sistem diofantskih enačb in rešitev.

$x A_4 + y B_3 = z AB_2$ <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>$4x = z$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$3y = 2z$</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>12</td></tr> </table>	A	$4x = z$	B	$3y = 2z$	x	y	z	3	8	12	$x A_7 B_6 C_2 + y C_2 = z AC_2 + w B_2 C$ <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>$7x = z$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$6x = 2w$</td></tr> <tr><td>C</td><td>$2x + 2y = w + 2z$</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>w</td></tr> <tr><td>2</td><td>15</td><td>14</td><td>6</td></tr> </table>	A	$7x = z$	B	$6x = 2w$	C	$2x + 2y = w + 2z$	x	y	z	w	2	15	14	6	$x AB_3 + y C_4 + z D_2 = w AC + s DB$ <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>$x = w$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$3x = s$</td></tr> <tr><td>C</td><td>$4y = w$</td></tr> <tr><td>D</td><td>$2z = s$</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>w</td><td>s</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>6</td><td>4</td><td>12</td></tr> </table>	A	$x = w$	B	$3x = s$	C	$4y = w$	D	$2z = s$	x	y	z	w	s	4	1	6	4	12								
A	$4x = z$																																																			
B	$3y = 2z$																																																			
x	y	z																																																		
3	8	12																																																		
A	$7x = z$																																																			
B	$6x = 2w$																																																			
C	$2x + 2y = w + 2z$																																																			
x	y	z	w																																																	
2	15	14	6																																																	
A	$x = w$																																																			
B	$3x = s$																																																			
C	$4y = w$																																																			
D	$2z = s$																																																			
x	y	z	w	s																																																
4	1	6	4	12																																																
$x ABC_4 + y D_4 C_{10} = z A_3 DC_4 + w B_2 C_7$ <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>$x = 3z$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$x = 2w$</td></tr> <tr><td>C</td><td>$4x + 10y = 7w + 4z$</td></tr> <tr><td>D</td><td>$4y = z$</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>w</td></tr> <tr><td>12</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr> </table>	A	$x = 3z$	B	$x = 2w$	C	$4x + 10y = 7w + 4z$	D	$4y = z$	x	y	z	w	12	1	4	6	$x A_2 B_3 + y CD = z C_3 AD_6 + w C_2 B$ <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>$2x = z$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$3x = w$</td></tr> <tr><td>C</td><td>$y = 2w + 3z$</td></tr> <tr><td>D</td><td>$y = 6z$</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>w</td></tr> <tr><td>1</td><td>12</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	A	$2x = z$	B	$3x = w$	C	$y = 2w + 3z$	D	$y = 6z$	x	y	z	w	1	12	2	3																			
A	$x = 3z$																																																			
B	$x = 2w$																																																			
C	$4x + 10y = 7w + 4z$																																																			
D	$4y = z$																																																			
x	y	z	w																																																	
12	1	4	6																																																	
A	$2x = z$																																																			
B	$3x = w$																																																			
C	$y = 2w + 3z$																																																			
D	$y = 6z$																																																			
x	y	z	w																																																	
1	12	2	3																																																	
$x AB_2 + y C_2 D = z A + w D_2 + s CB$ <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>$x = z$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$2x = s$</td></tr> <tr><td>C</td><td>$2y = s$</td></tr> <tr><td>D</td><td>$y = 2w$</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>w</td><td>s</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	A	$x = z$	B	$2x = s$	C	$2y = s$	D	$y = 2w$	x	y	z	w	s	2	2	2	1	4	$x AB_2 + y C_2 D = z A + w D_3 + s C_2 B$ <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>$x = z$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$2x = s$</td></tr> <tr><td>C</td><td>$2y = 2s$</td></tr> <tr><td>D</td><td>$y = 3w$</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>w</td><td>s</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr> </table>	A	$x = z$	B	$2x = s$	C	$2y = 2s$	D	$y = 3w$	x	y	z	w	s	3	6	3	2	6	$x AB_3 + y C_2 = z A_2 + w B_2 C$ <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>$x = 2z$</td></tr> <tr><td>B</td><td>$3x = 2w$</td></tr> <tr><td>C</td><td>$2y = w$</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 5px auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>w</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr> </table>	A	$x = 2z$	B	$3x = 2w$	C	$2y = w$	x	y	z	w	4	3	2	6
A	$x = z$																																																			
B	$2x = s$																																																			
C	$2y = s$																																																			
D	$y = 2w$																																																			
x	y	z	w	s																																																
2	2	2	1	4																																																
A	$x = z$																																																			
B	$2x = s$																																																			
C	$2y = 2s$																																																			
D	$y = 3w$																																																			
x	y	z	w	s																																																
3	6	3	2	6																																																
A	$x = 2z$																																																			
B	$3x = 2w$																																																			
C	$2y = w$																																																			
x	y	z	w																																																	
4	3	2	6																																																	

[Izidor Hafner](#)

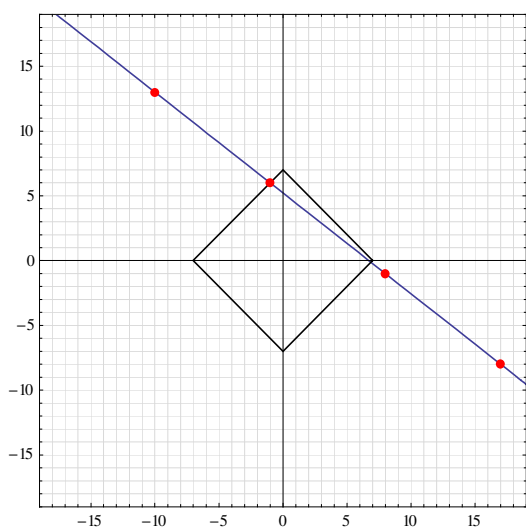
"Balancing Abstract Chemical Equations"

<http://demonstrations.wolfram.com/BalancingAbstractChemicalEquations/>

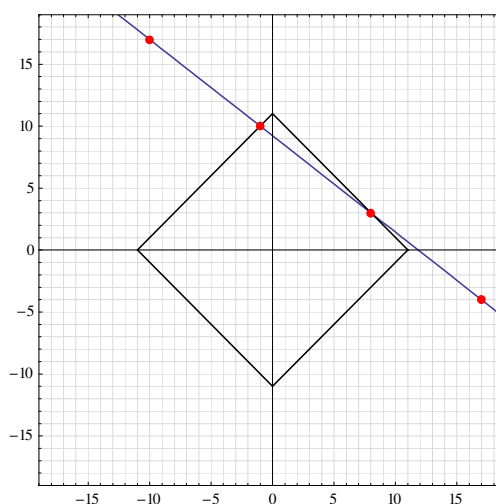
Grafična rešitev problema odmerjanja količine vode

Klasičen problem odmerjanja c litrov vode z vrčema za a in b litrov, pomeni reševanje diofantske enačbe $ax+by=c$. Tokrat nas zanima še rešitev, ki zahteva najmanjše število dejanj (odlitij in izlitij). Recimo, da moramo z vrčema za 7 in 9 litrov odmeriti 47 litrov. Spodnja slika prikazuje nekaj rešitev diofantske enačbe $7x+9y=47$.

$$7x+9y=47$$



$$7x+9y=83$$

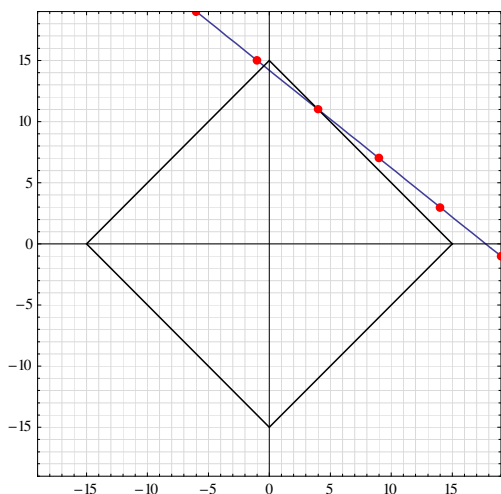


Kvadrat pa je graf relacije $|x|+|y|=7$. Rešitev je z najmanj dejanj je $(-1, 6)$.

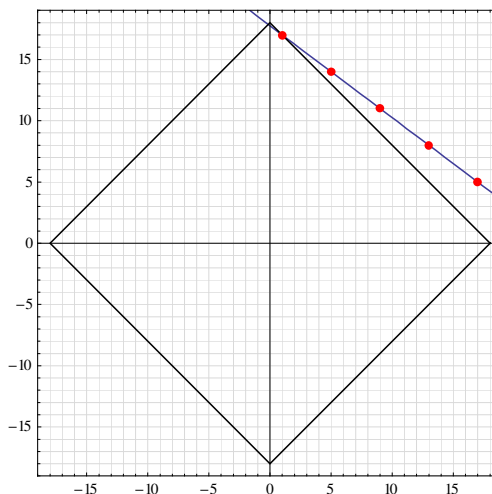
Kaj pa če so dovoljena le dolivanja (iščemo samo nenegativne rešitve). Če je c manjše ali enako Fröbeniusovemu številu, to je $ab-a-b$, potem se lahko zgodi, da rešitev ne obstaja. Če pa je $c > ab-1$, potem nenegativna rešitev zanesljivo obstaja.

Desna slika nam prikazuje rešitve enačbe $7x+9y=83$. Nenegativna rešitev je $(8, 3)$. Kaj nam prikazujeta spodnji sliki?

$$4x+5y=71$$

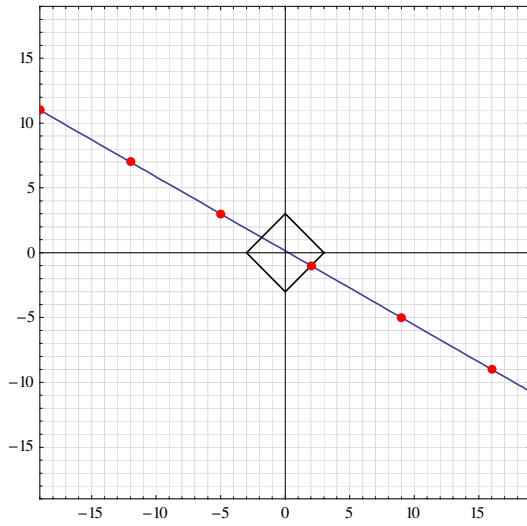


$$3x+4y=71$$

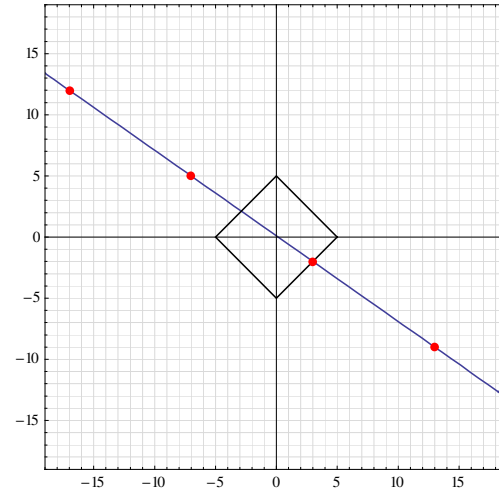


Recimo, da moramo odmeriti 1 liter. Zdaj seveda nimamo nenegativnih rešitev.

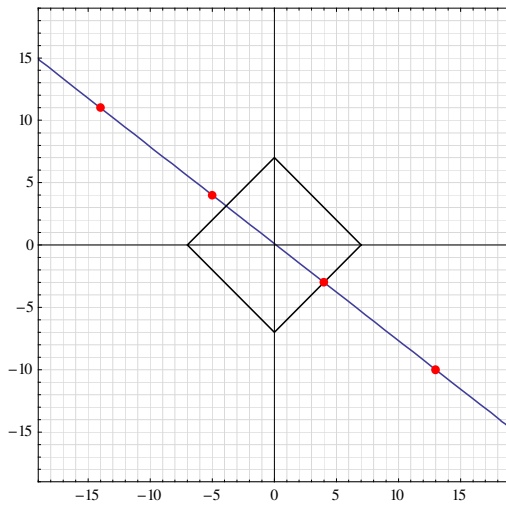
$$4x + 7y = 1$$



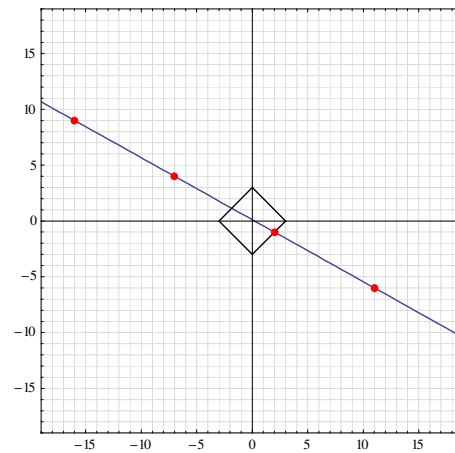
$$7x + 10y = 1$$



$$7x + 9y = 1$$



$$5x + 9y = 1$$



Rešitve

Barvni sudoku

3	4	1	2
2	1	3	4
1	2	4	3
4	3	2	1

2	1	4	3
4	3	2	1
1	4	3	2
3	2	1	4

5	3	1	4	2
2	4	5	1	3
3	1	4	2	5
1	2	3	5	4
4	5	2	3	1

5	1	3	2	4
4	5	2	3	1
3	2	4	1	5
1	3	5	4	2
2	4	1	5	3

4	2	5	3	1
1	4	2	5	3
2	3	4	1	5
5	1	3	2	4
3	5	1	4	2

1	3	4	2
3	4	2	1
4	2	1	3
2	1	3	4

4	3	2	5	1
3	5	4	1	2
5	4	1	2	3
2	1	3	4	5
1	2	5	3	4

3	1	2	4
1	3	4	2
4	2	1	3
2	4	3	1

5	2	4	1	3
3	5	2	4	1
1	4	3	5	2
2	1	5	3	4
4	3	1	2	5

2	1	3	4
4	2	1	3
3	4	2	1
1	3	4	2

2	5	4	1	3
5	3	1	2	4
3	1	2	4	5
4	2	3	5	1
1	4	5	3	2

2	3	1	4
3	4	2	1
1	2	4	3
4	1	3	2

Latinski kvadrati

2	5	4	3	1
4	3	1	2	5
1	2	3	5	4
5	1	2	4	3
3	4	5	1	2

2	1	4	3
3	2	1	4
1	4	3	2
4	3	2	1

3	2	1	5	4
1	3	2	4	5
4	5	3	2	1
5	1	4	3	2
2	4	5	1	3

3	4	2	1
4	2	1	3
2	1	3	4
1	3	4	2

1	3	5	2	4
3	5	4	1	2
2	4	3	5	1
4	2	1	3	5
5	1	2	4	3

1	4	2	5	3
4	5	3	2	1
3	2	4	1	5
5	3	1	4	2
2	1	5	3	4

5	4	1	3	2
4	5	3	2	1
3	2	5	1	4
2	1	4	5	3
1	3	2	4	5

2	3	4	1
3	2	1	4
1	4	3	2
4	1	2	3

1	4	3	2
4	3	2	1
2	1	4	3
3	2	1	4

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

3	1	2	4	5
5	2	3	1	4
1	5	4	3	2
2	4	1	5	3
4	3	5	2	1

2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3
1	2	3	4

Sudoku s črkami

2 D	3 A	1 A	4 C
1 D	4 B	3 D	2 B
3 C	2 A	4 A	1 B
4 D	1 C	2 C	3 B

1 C	2 D	3 A	4 D
4 C	3 D	2 A	1 D
2 B	1 A	4 B	3 C
3 B	4 A	1 B	2 C

1 C	4 D	3 D	2 B
4 C	1 D	2 D	3 A
3 C	2 C	1 A	4 B
2 A	3 B	4 A	1 B

2 C	3 A	4 A	1 A
4 C	1 C	3 D	2 A
3 B	2 B	1 D	4 D
1 B	4 B	2 D	3 C

2 B	1 C	4 D	3 A
1 D	3 C	2 C	4 B
3 B	4 A	1 B	2 D
4 C	2 A	3 D	1 A

4 A	3 A	2 A	1 A
2 D	4 C	1 D	3 B
1 C	2 C	3 D	4 B
3 C	1 B	4 D	2 B

2 D	3 B	1 C	4 C
4 A	1 B	3 A	2 B
1 A	2 C	4 B	3 D
3 C	4 D	2 A	1 D

4 C	1 C	3 C	2 B
1 A	4 A	2 C	3 A
2 D	3 D	4 B	1 B
3 B	2 A	1 D	4 D

3 B	4 A	2 A	1 C
1 A	2 B	3 A	4 D
4 B	3 C	1 D	2 C
2 D	1 B	4 C	3 D

3 B	2 A	1 B	4 A
2 C	3 C	4 D	1 C
4 C	1 A	3 A	2 B
1 D	4 B	2 D	3 D

4 B	3 A	2 A	1 C
3 D	2 C	1 A	4 C
2 D	1 D	4 A	3 C
1 B	4 D	3 B	2 B

3 C	1 C	4 B	2 A
1 D	3 A	2 C	4 D
4 C	2 B	3 D	1 B
2 D	4 A	1 A	3 B

Futoški

<p>2 4 3 1</p> <p>3 1 < 2 < 4</p> <p>1 3 4 > 2</p> <p>4 2 1 3</p>	<p>1 4 > 2 3</p> <p>2 < 3 4 1</p> <p>4 1 3 2</p> <p>3 2 > 1 4</p>	<p>4 1 2 5 > 3</p> <p>5 4 > 1 3 2</p> <p>1 3 4 2 < 5</p> <p>2 5 > 3 4 1</p> <p>3 2 5 1 4</p>
<p>5 4 > 1 2 3</p> <p>2 3 4 < 5 1</p> <p>4 5 3 1 2</p> <p>1 2 5 3 4</p> <p>3 1 < 2 < 4 5</p>	<p>2 4 > 3 1</p> <p>4 3 1 < 2</p> <p>1 2 4 3</p> <p>3 1 < 2 4</p>	<p>1 2 < 3 4</p> <p>4 1 < 2 < 3</p> <p>3 4 1 2</p> <p>2 3 4 1</p>
<p>3 < 4 1 2</p> <p>4 2 3 1</p> <p>1 < 3 2 < 4</p> <p>2 1 4 3</p>	<p>3 > 1 2</p> <p>1 2 < 3</p> <p>2 3 1</p>	<p>1 < 5 3 < 4 2</p> <p>5 3 4 2 1</p> <p>3 1 2 5 4</p> <p>4 2 5 1 3</p> <p>2 < 4 > 1 3 5</p>
<p>1 3 > 2</p> <p>2 > 1 3</p> <p>3 2 1</p>	<p>2 4 1 < 3 5</p> <p>4 1 2 5 3</p> <p>1 5 3 > 2 4</p> <p>5 3 4 > 1 2</p> <p>3 2 5 4 > 1</p>	<p>2 4 1 3</p> <p>3 2 < 4 > 1</p> <p>1 3 2 4</p> <p>4 1 3 > 2</p>

Rdeči kvadrati

R	2		1
1	2	R	
2		2	
R	R	1	

	1	0	
R			
3	R	2	
2	R		

	R	R	1
2	R	3	
	2	2	0
	R		

0	2	R	
		R	3
	1		R
			1

2	R		0
R	2		0
1	1		

0			0
		2	
1	R	2	R

	1	R	1
2	R	2	
2	R		

2	R		
R	3		0
R			
R	2	0	

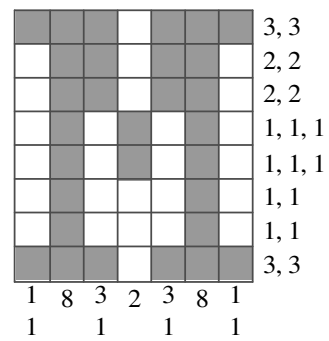
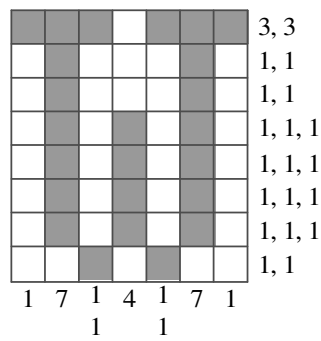
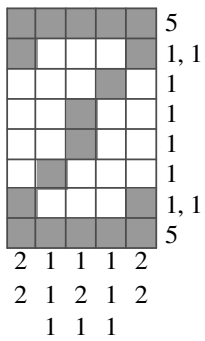
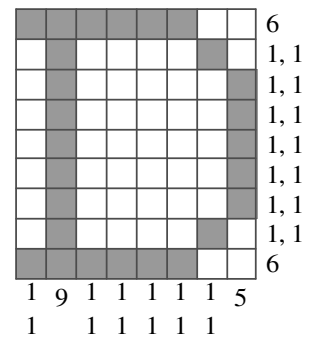
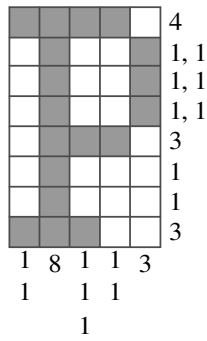
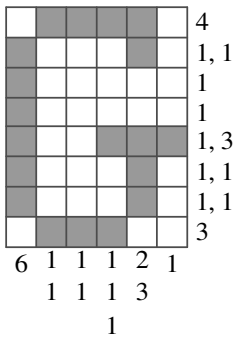
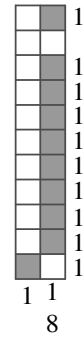
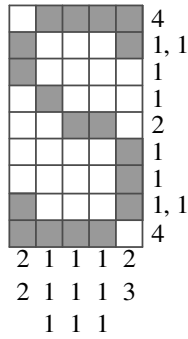
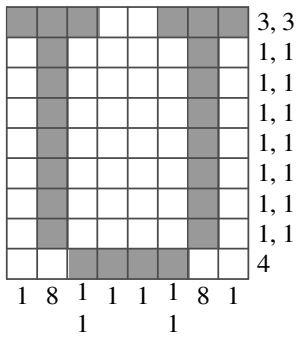
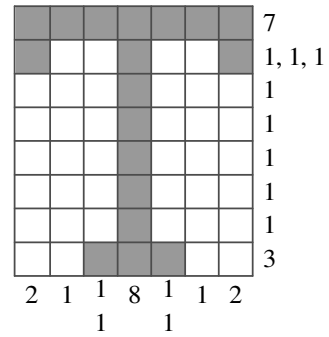
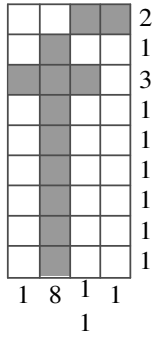
			0
	0		
R	2	R	1

	1	1	0
	R		2
R		R	R
1		2	

1	R	1	
2	3	3	
	R	R	1
1			

	0		
1			0
	R	2	
1		R	1

Gobelini



Križne vsote

	17	11	
16	9	7	9
15	8	3	4
		6	1
			5

	13	14					
6	4	2				3	13
16	9	7	15		7	8	1
		13	5	8	14	9	1
			16	7	5	4	
				11	9	2	

	8	18					
16	7	9				8	6
8	1	7	12		9	5	3
		11	2	9	4	11	2
				10	3	1	6
					4	3	1

	10	12		
6	1	5	10	
17	9	7	1	9
			14	6
			4	3
				1

	10	8					
14	9	5			6	10	
3	1	2	15		21	4	1
		8	1	7	5	16	4
			18	8	1	9	
				12	4	8	

	3	13		
5	1	4	16	
15	2	9	4	9
			7	3
			14	9
				5

	17	15					
17	9	8			10	17	
9	8	1	12		18	14	6
		10	6	4	14	1	4
				21	8	4	9
					17	9	8

	7	22					
11	6	5			6	10	
10	1	9	14		16	4	1
		13	8	5	20	8	5
			24	9	8	7	
				7	6	1	

	5	13		
3	1	2	12	
13	4	6	3	
		14	5	9

	13	12			
8	5	3	7		
20	8	9	3	14	
			7	4	3
				5	4
				9	7

	8	9			
3	2	1	20		
17	6	8	3	9	
			9	8	1
			17	9	8

	15	8			
12	7	5	23		
17	8	3	6	6	
			12	8	4
			11	9	2

Križni produkti

		12	15	6	56	
28	4	7	14	2	7	45
15	3	5	135	3	9	5
28	45	9	5	36	4	9
35	7	5	168	7	8	3
36	4	9	12	4	3	
24	2	4	3			
36	4	9				

		27	24	18	320	
24	3	8	45	9	5	45
63	9	7	80	2	8	5
15	40	4	5	18	2	9
10	5	2	72	6	3	4
24	3	8	35	7	5	
112	7	2	8			
30	5	6				

	10	12
8	2	4
15	5	3

	36	3456	3456	35	
24	4	6	28	4	7
36	9	4	10	2	5
	432	8	6	9	
	324	9	2	6	3
10	5	2	32	8	4

	16	268	6720	18	
14	2	7	30	5	6
48	8	6	12	4	3
	105	3	5	7	
	1008	2	7	8	9
27	3	9	30	6	5

	40	520	5040	6	
72	8	9	12	6	2
35	5	7	35	5	3
	30	2	5	3	
	1344	4	7	8	6
20	4	5	35	7	5

	18	24		
27	9	3	48	
64	2	8	4	36
		8	2	4
		54	6	9

	36	63			
63	9	7	8		
72	4	9	2	35	
		20	4	5	
			24	3	8
			63	9	7

	12	40					
12	3	4		21	8		
20	4	5	28	6	3	2	
	14	2	7	168	6	7	4
		4	3	5			
		54	6	9			

	12	70		
8	4	2	18	
30	3	5	2	
	63	7	9	

	8	30	10
60	2	6	5
40	4	5	2

	6	35					
27	3	9		72	18		
6	2	3	27	112	27	9	3
	15	5	3	96	2	8	6
		9	7	8			
		28	4	7			

Labirint na kocki

		21	20		
		22	23		
		8	9	10	
		1	12	11	17
7	2	14	13		
6	3	15	16		
		4	18		
		5	19		

		16	1		
		15	2		
		13	3	4	5
		12	11	10	9
14	23	22			
18	19	21	8		
		20	7		
		17	6		

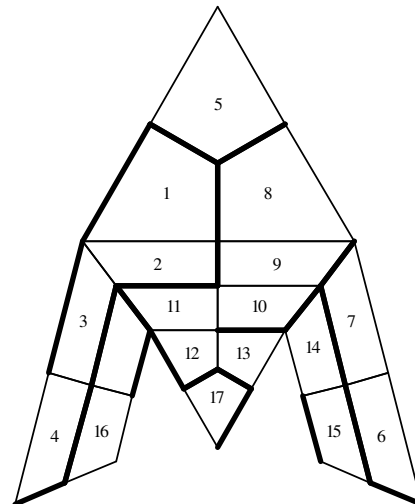
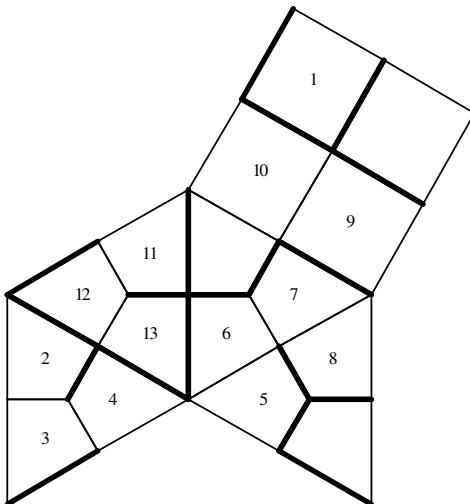
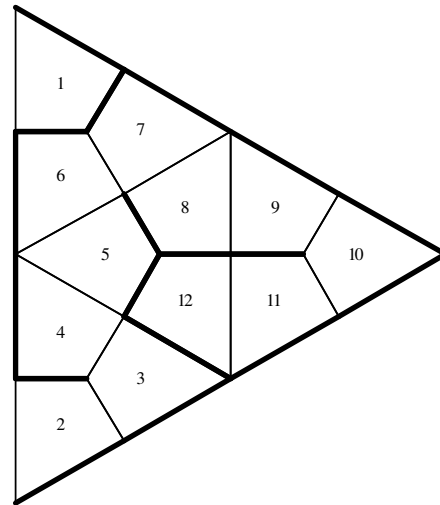
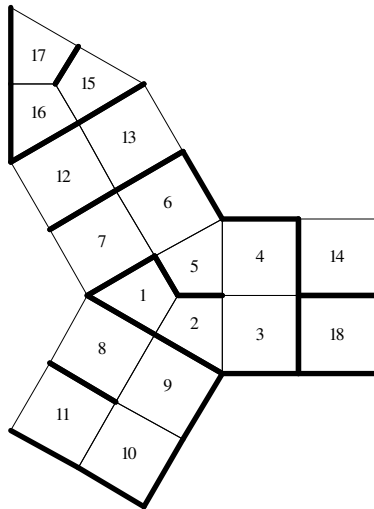
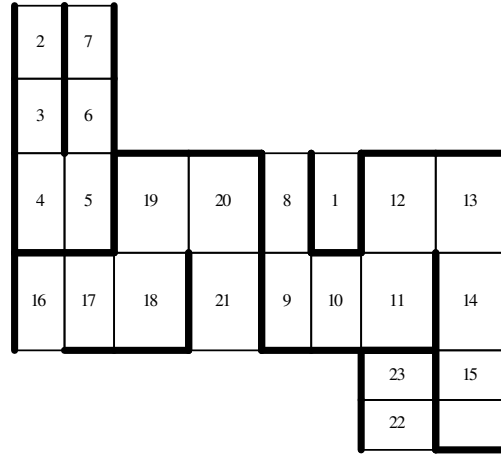
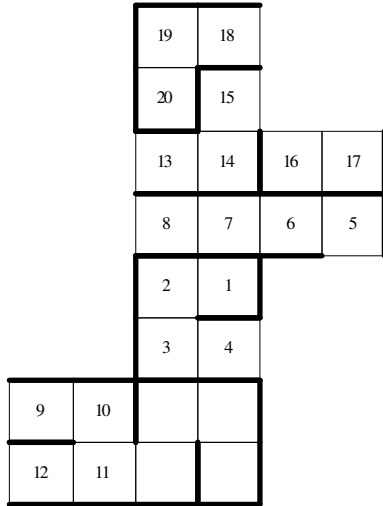
				17	1		
				16	2		
6	7	18	15		3	4	5
9	8	19	14	13	12	11	10
				23	22		
				20	21		

		22	23				
		12	24				
21	13	11	10	2	3	4	20
18	14	15	9	1	6	5	19
						7	17
						8	16

		18	21				
		19	20				
16	15	14	3	2	22	23	17
11	12	13	4	1	7	8	9
				5	6		
					10		

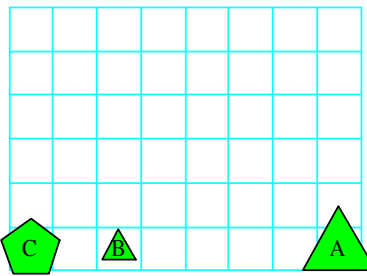
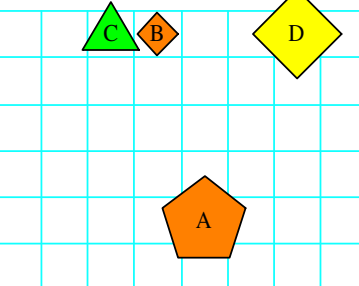
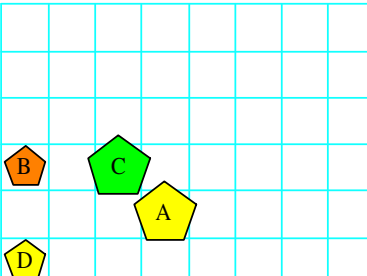
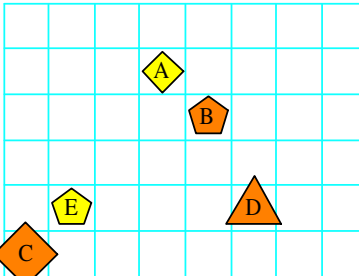
		2	3				
		9	8				
15	14	10	7	6	5	4	1
16	13	11	23	24	20	19	18
				22	21		
				12	17		

Labirinti na enostavnih poliedrih

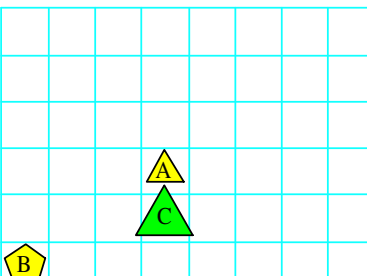
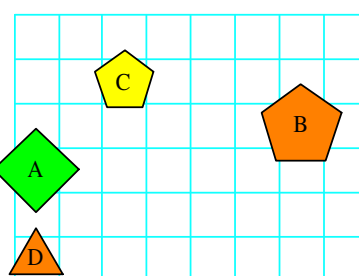
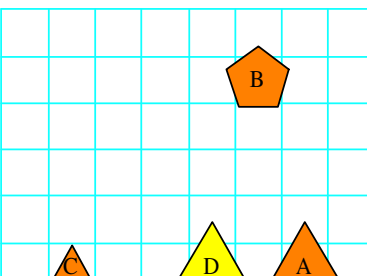
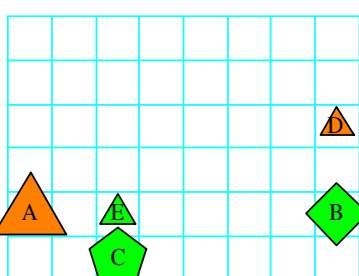


Imena likov

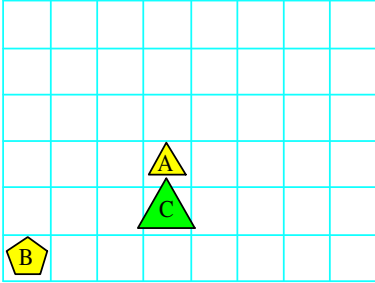
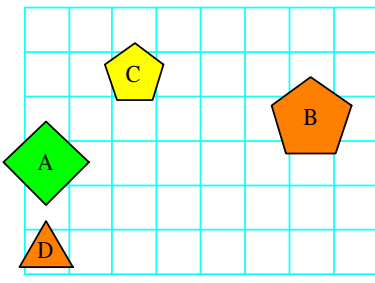
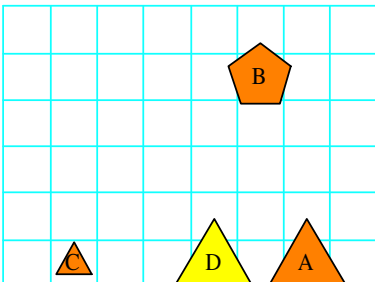
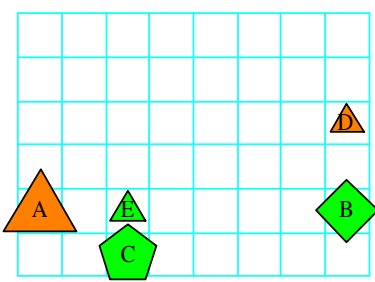
1.

<p>Stavek pod številko 2 je odvisen od ostalih .</p> 	<p>Stavek pod številko 4 je odvisen od ostalih .</p> 
<p>Stavek pod številko 2 je odvisen od ostalih .</p> 	<p>Stavki so neodvisni .</p> 

2.

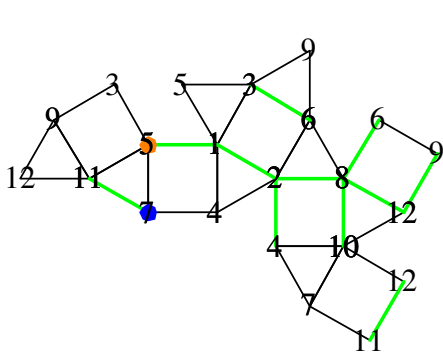
<p>Stavek pod številko 3 je odvisen od ostalih .</p> 	<p>Stavek pod številko 2 je odvisen od ostalih .</p> 
<p>Stavek pod številko 4 je odvisen od ostalih .</p> 	<p>Stavek pod številko 4 je odvisen od ostalih .</p> 

3.

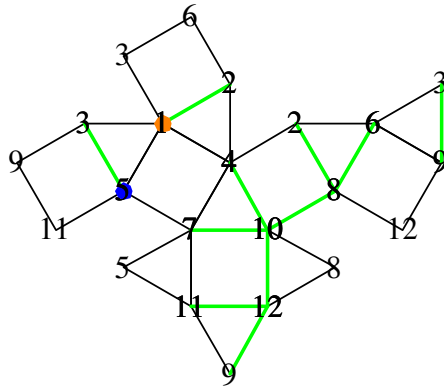
<p>Stavek pod številko 3 je odvisen od ostalih .</p> 	<p>Stavek pod številko 2 je odvisen od ostalih .</p> 
<p>Stavek pod številko 4 je odvisen od ostalih .</p> 	<p>Stavek pod številko 4 je odvisen od ostalih .</p> 

Labirinti na robovih poliedra

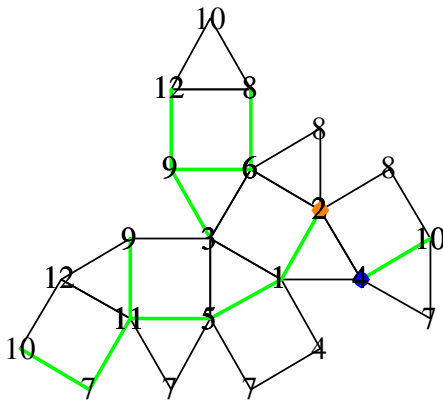
1.



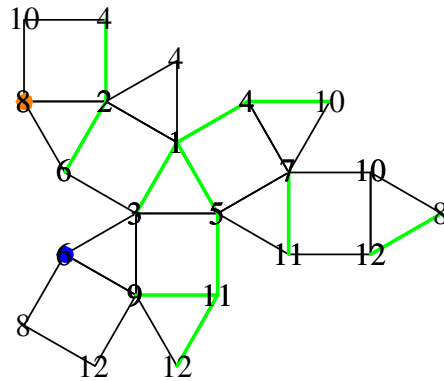
{7, 11, 12, 8, 2, 1, 5}



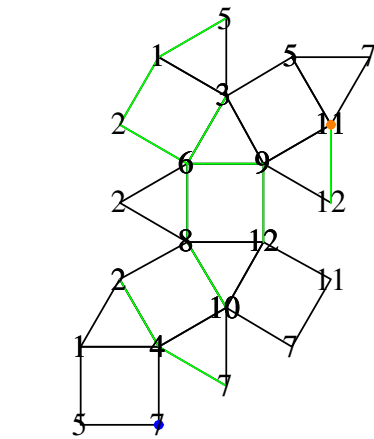
{5, 3, 9, 12, 10, 8, 2, 1}



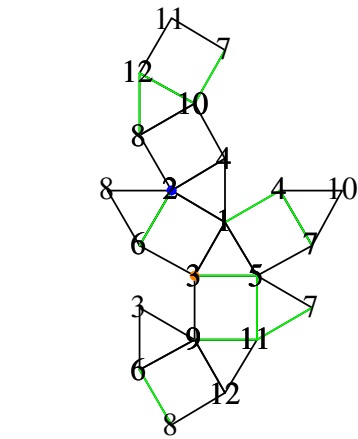
{4, 10, 7, 11, 5, 1, 2}



{6, 2, 4, 1, 5, 11, 12, 8}

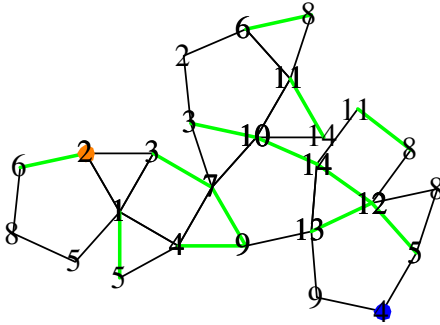


{7, 4, 2, 6, 9, 12, 11}

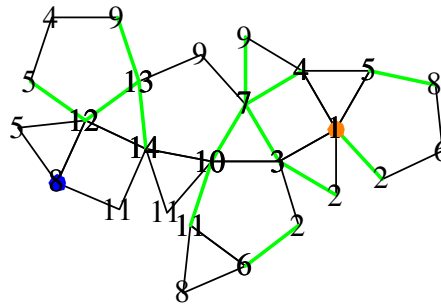


{2, 6, 8, 12, 10, 7, 11, 5, 3}

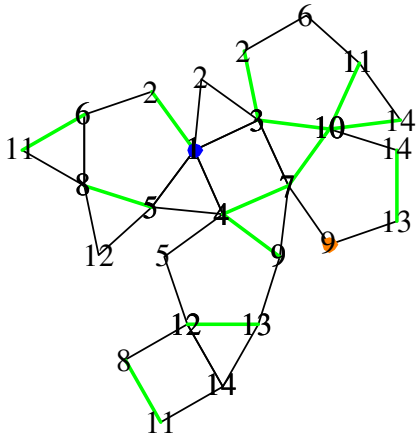
2.



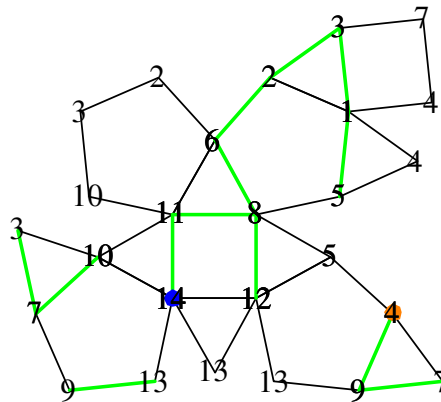
{4, 9, 7, 3, 10, 14, 11, 8, 6, 2}



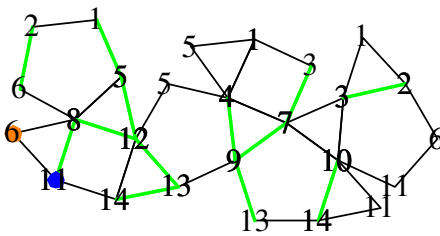
{8, 5, 12, 13, 9, 7, 3, 2, 1}



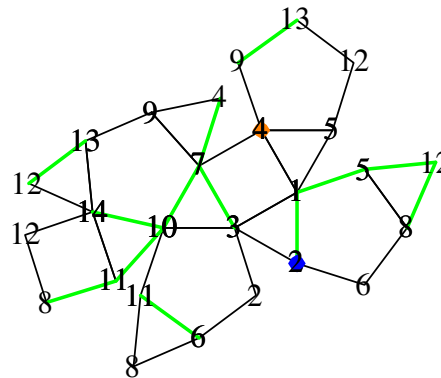
{1, 2, 3, 10, 7, 4, 9}



{14, 11, 8, 6, 2, 3, 7, 9, 4}

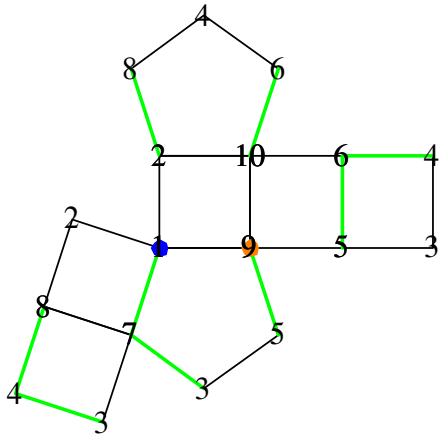


{11, 8, 12, 13, 9, 7, 3, 2, 6}

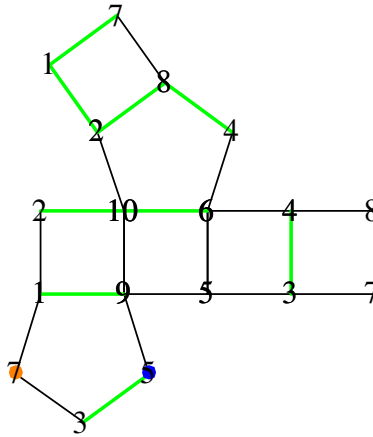


{2, 1, 5, 12, 8, 11, 10, 7, 4}

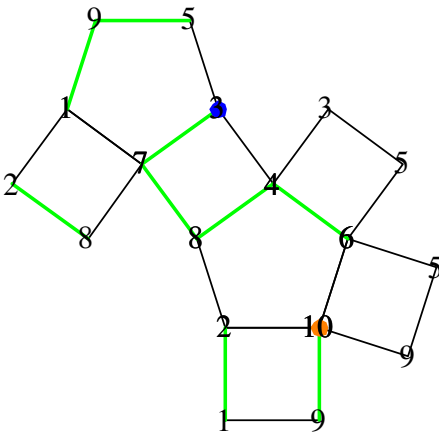
3.



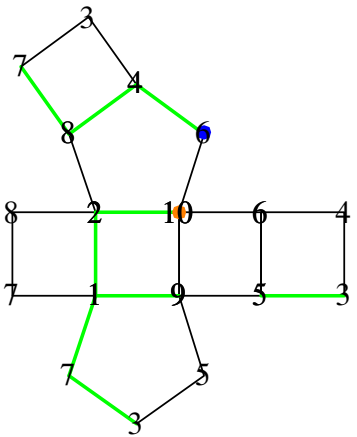
{1, 7, 3, 4, 6, 5, 9}



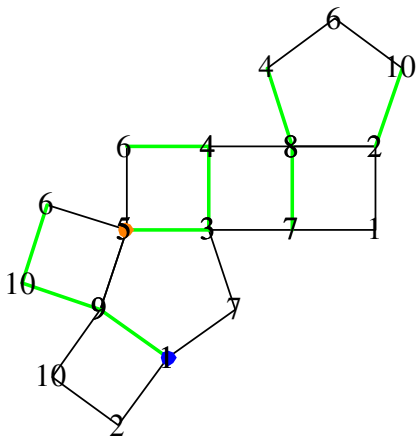
{5, 3, 4, 8, 2, 1, 7}



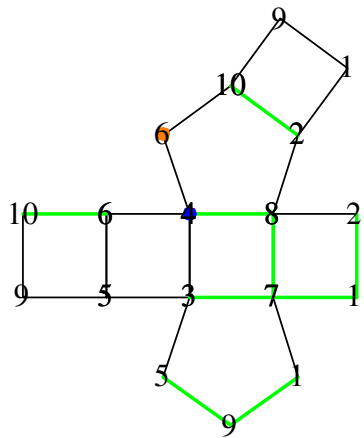
{3, 7, 8, 2, 1, 9, 10}



{6, 4, 8, 7, 1, 2, 10}

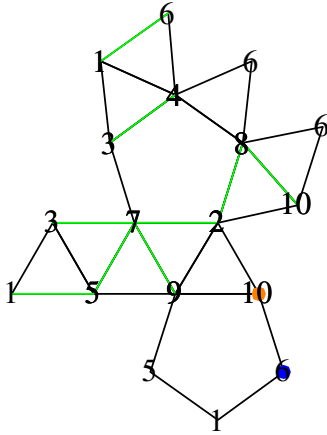
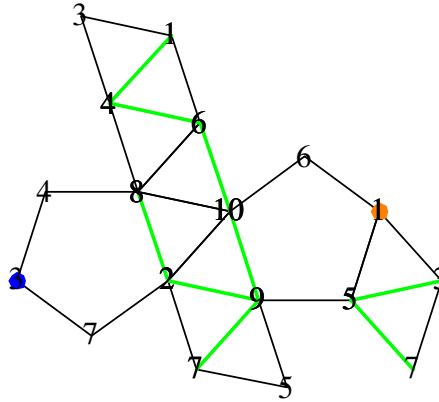
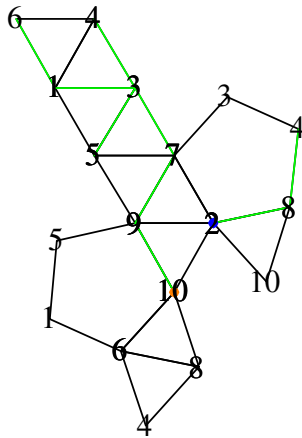
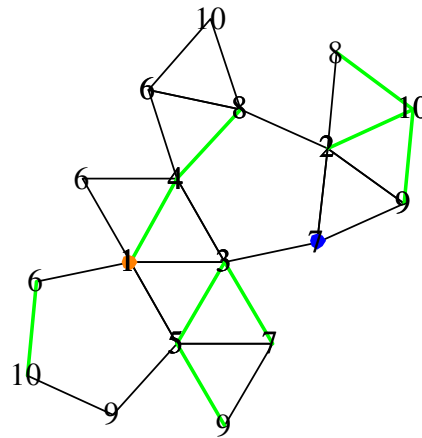
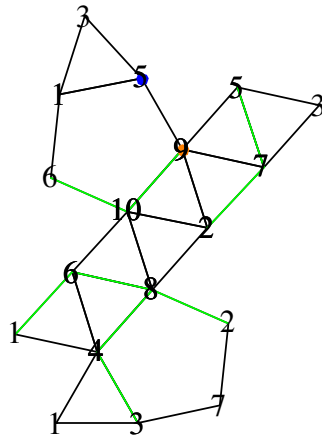
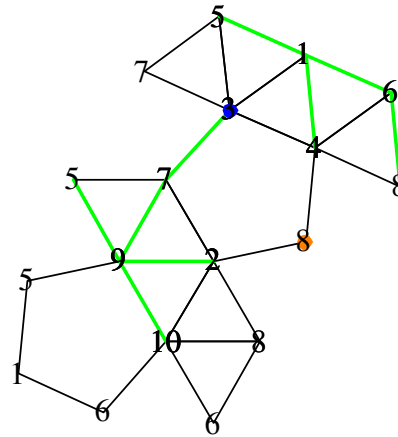


{1, 9, 10, 6, 4, 3, 5}



{4, 8, 7, 1, 2, 10, 6}

4.

 $\{6, 1, 5, 7, 2, 8, 10\}$  $\{3, 5, 7, 9, 10, 6, 4, 1\}$  $\{2, 8, 4, 3, 7, 9, 10\}$  $\{7, 3, 5, 9, 10, 8, 4, 1\}$  $\{5, 7, 2, 8, 6, 10, 9\}$  $\{3, 7, 9, 5, 1, 6, 8\}$

Grupe

Sličice na drugi sliki moramo zaporedoma označiti:
 {10, 8, 15, 12, 13, 3, 4, 6, 7, 11, 16, 17, 9, 14, 2, 1, 5}

Linearne grupe:

a) {1, 4, 3, 5, 2, 7, 6}, {6, 3, 7, 2, 1, 5, 4}

b) {5, 7, 4, 3, 2, 1, 6}, {5, 1, 4, 3, 6, 2, 7}

Prostorska predstavljenost

a)

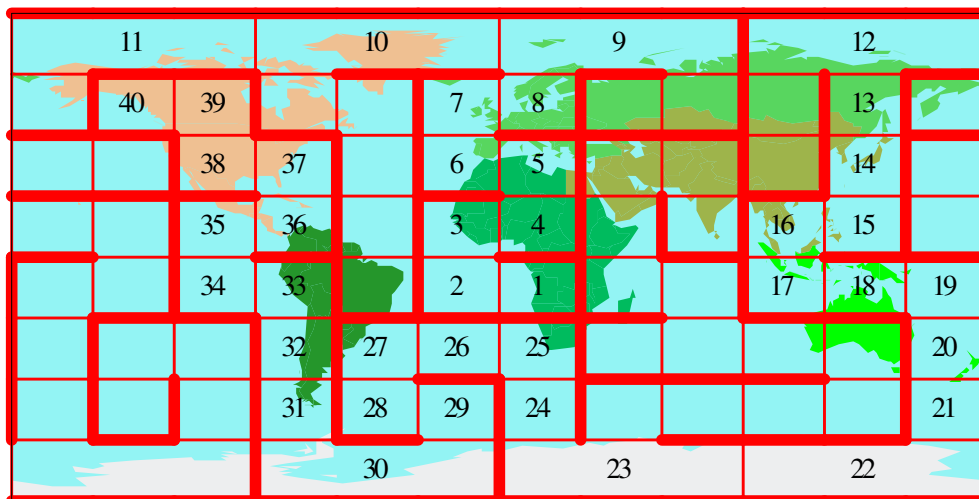
	1	2	3
1	3	10	5
2	4	1	7
3	8	1	8
4	3	7	4
5	2	10	12

b)

	1	2	3
1	7	4	5
2	2	2	3
3	2	1	3
4	1	2	3
5	2	4	6

Labirinti na zemljevidu

1.



2.

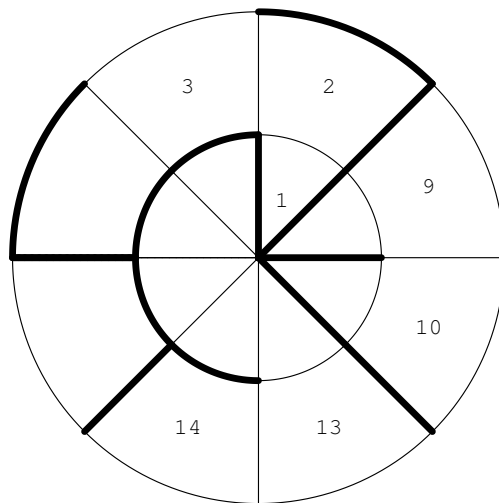
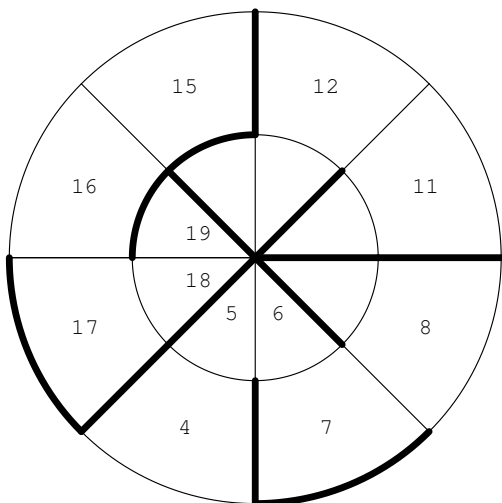
	26		27			25		
			29	28		23 24		
	33	32	31	30	6	5	22	21
35	34	39	40	43	7	4	19	20
36	37	38	41	42	8	3	18	17
					9	2		16
14					10	1		15
	12		11					13

3.

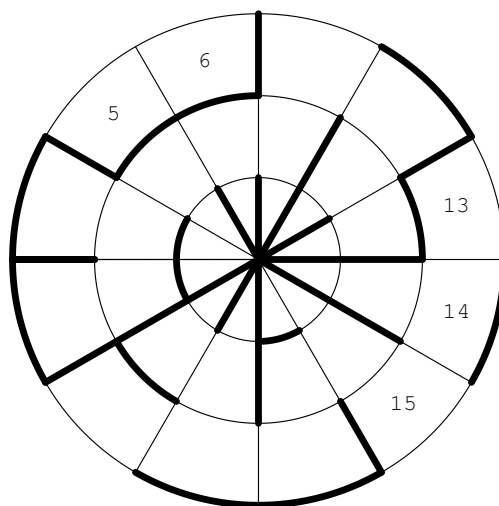
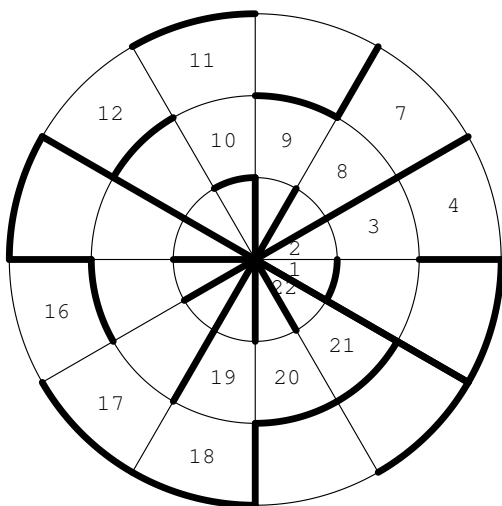
	20		21			
		19	23	22		
16	17	18	24			15
34	35	36	25	26	27	13 14
33	32	31	30	29	28	12 11
	5	4	3	2	1	10
7	6					9
						8

Večdelni labirinti na zemljevidu

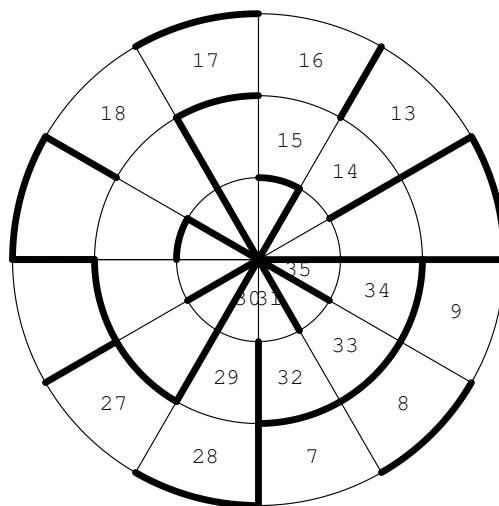
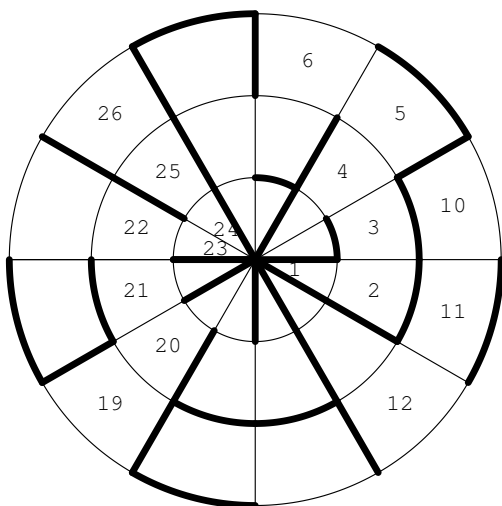
1.



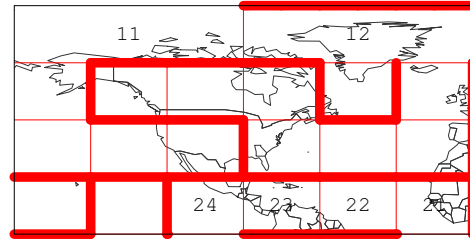
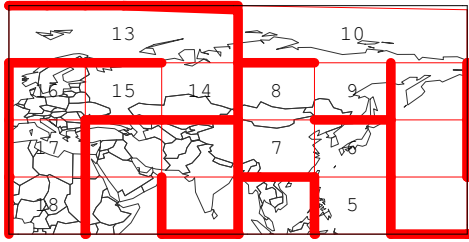
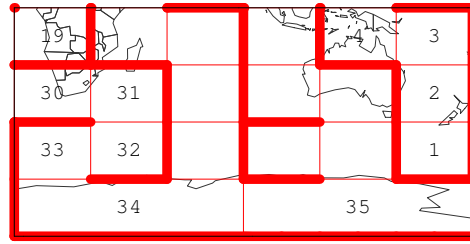
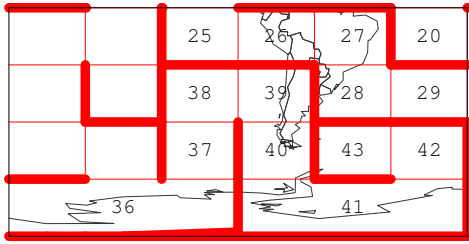
2.



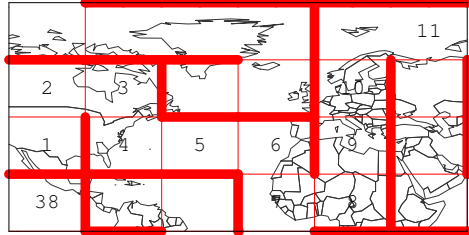
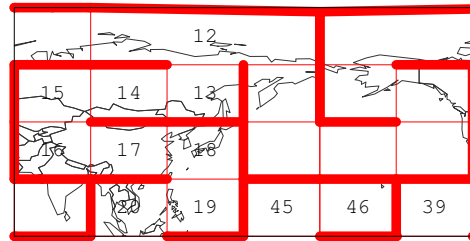
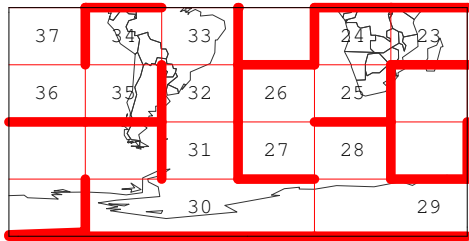
3.



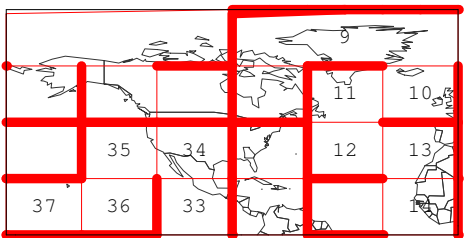
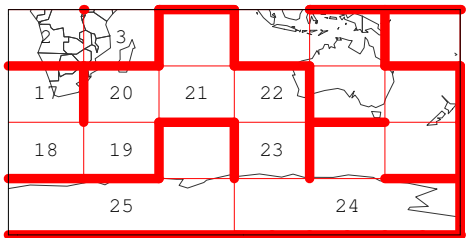
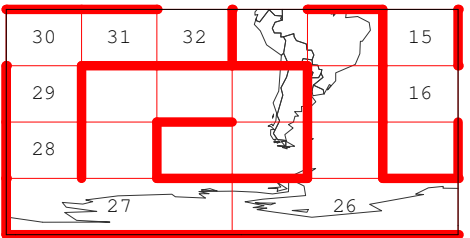
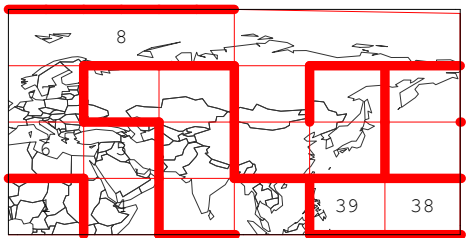
4.



5.



6.



Odstranjene kockice

59 78 82

73 50 53

83 55 56

87 65 80

Kocki določi mreži

4, 1, 3, 1, 2, 1.

Izdaja: Založniško podjetje **LOGIKA d.o.o.**, Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik. Poslovni račun pri NLB: 02312-0016592829. Davčna številka: SI56917309. Podjetje je zavezanec za DDV po zakonu o DDV. Za izdajatelja: *Izidor Hafner*.

E-mail: logika@siol.net.

Spletna stran: <http://www.logika.si>.

Revija *Logika & razvedrilna matematika* je vpisana v register medijev pri Ministrstvu za kulturo pod številko 759. Revijo je sofinanciralo **Ministrstvo za izobraževanje, znanost, kulturo in šport**.

Strokovni pokrovitelj: *Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko - oddelek za teoretično računalništvo*.

Glavni in odgovorni urednik: *dr. Izidor Hafner* (<http://mat03.fe.uni-lj.si/html/people/izidor/homepage/>)

Člana časopisnega sveta: *prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.* Recenzent: *Vilko Domajnko, prof.*

Sodelavci: *mag. Urša Demšar, dr. Gregor Dolinar, Monika Kavalir, dr. Meta Lah, Boštjan Kuzman, Teja Oblak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, mag. Katka Šenk in dr. Aleš Vavpetič.*

Oblikovanje: *Ana Hafner*

Jezikovni pregled: *Besana*

Za objavljene prispevke ne plačujemo honorarjev.

© 2015 LOGIKA d.o.o.

ISSN 2350-532X

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA, letnik XXIV, št. 4 od 4, 2014/2015

Elektronska izdaja. Cena revije: 0 €.