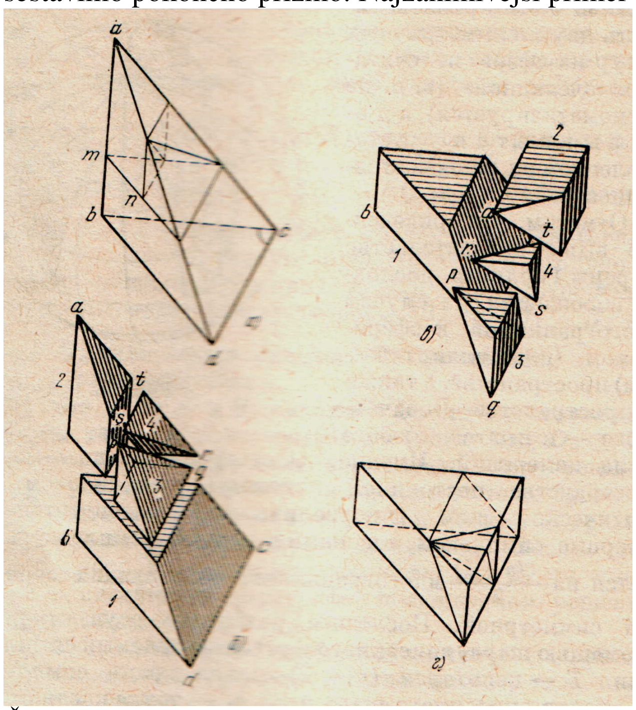
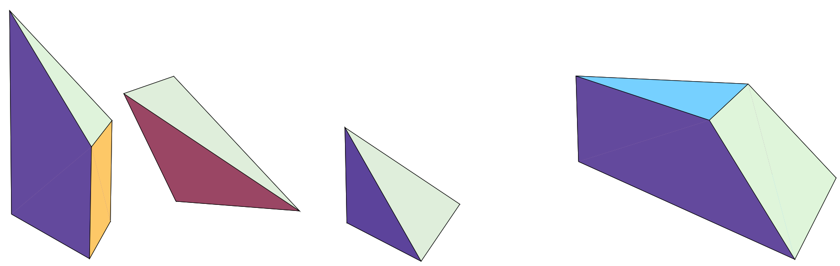
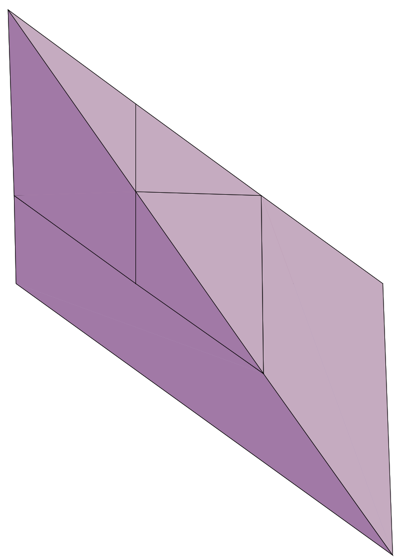
Tretji Hilbertov problem

Leta 1900 je znameniti nemški matematik David Hilbert (1862-1943) predstavil seznam 23 najpomembnejših še nerešenih matematičnih problemov. Tretji problem na tem seznamu je bil takrat že rešen. Njegov učenec Max Dehn (1878-1952) je dokazal, da obstajajo poliedri z enako prostornino, ki jih ne moremo sestaviti iz enakih delov. V posebnem primeru je dokazal, da kocke ne moremo razrezati na končno mnogo poliedrov, iz katerih bi lahko sestavili pravilni četverec istega volumna.
Leta 1896 je Hill našel več primerov četvercev, ki jih lahko razrežemo in nato iz delov sestavimo pokončno prizmo. Najzanimivejši primer prikazuje spodnja slika.

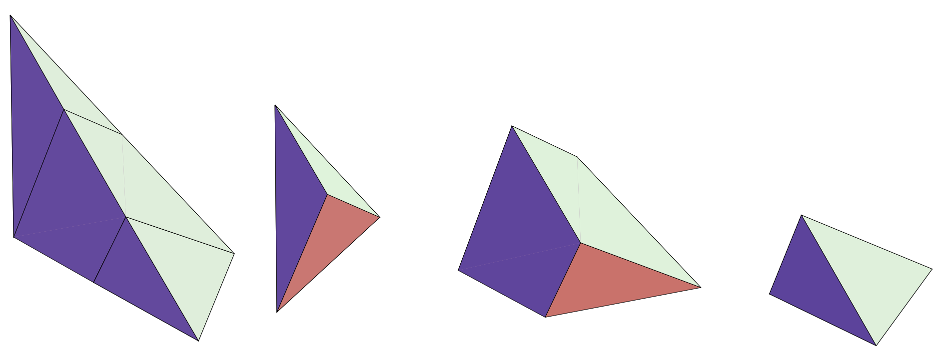


Četverec razžagamo na štiri dele. V prilogi sta podana kompleta mrež, ki omogočata sestavo obeh teles. Omenjeno ray\aganje je odkril Sydler l. 1956.

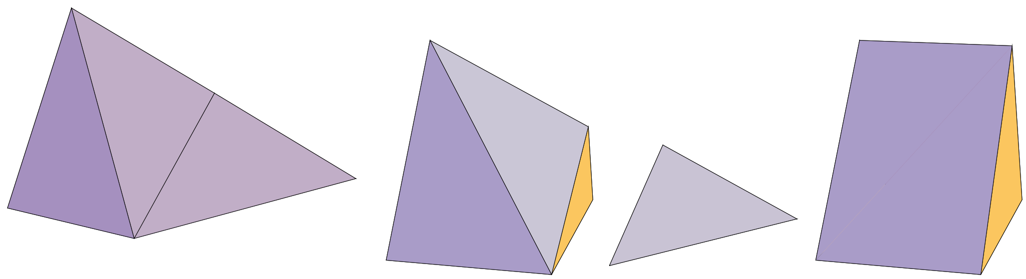




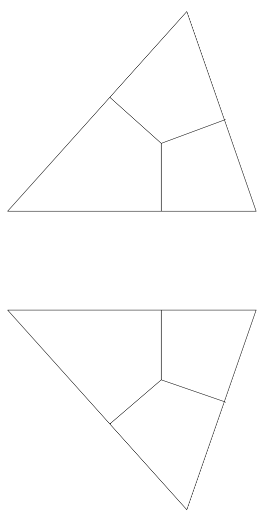
Obstaja še enostavnejše razžaganje Hillovega četverca na tri dele, ki dajo neko drugo prizmo. To je odkril Phillip Schobi l. 1985.



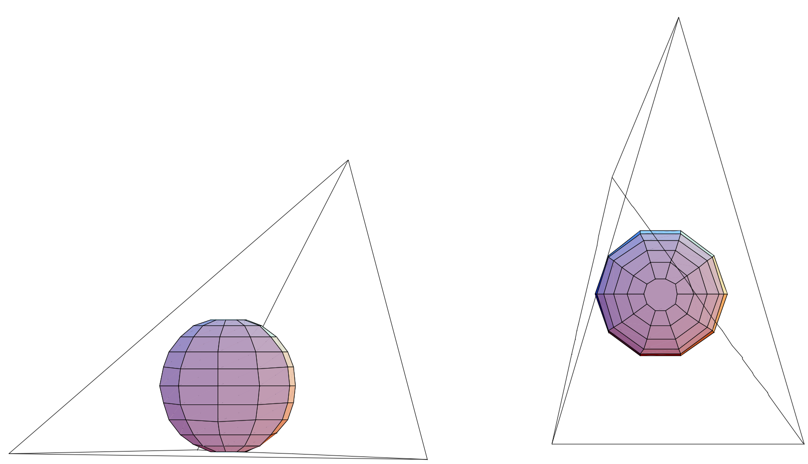
Uporabi mreže v prilogi za sestavo dveh teles.
Sydler je l. 1965 dokončno zaključil naloge v zvezi s tretjim Hilbertovim problemom. Dokazal je, da je Dehnov pogoj tudi zadosten za enako sestavljivost teles: Za enako sestavljivost teles je potrebno in zadostno f(A)=f(B), za vsako aditivno funkcijo, ki izpolnjuje pogoj $f(\pi)=0$. Danes temu pravimo Dehn-Sydlerjev izrek.
V dokazu tega izreka je tudi razžaganje piramide s posebno trapezno osnovo in sestavo delov v trikotno prizmo. Mreže so dane v prilogi.

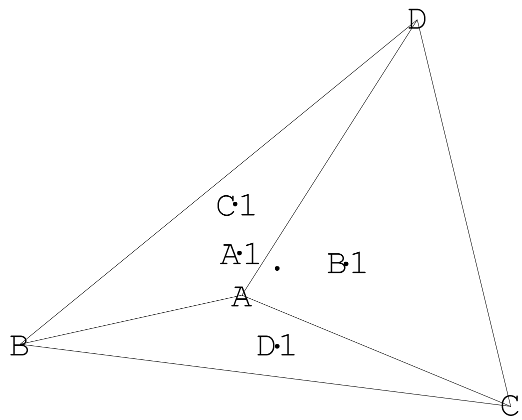


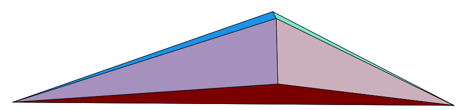
V nasprotju s poliedri, pa sta dva mnogokotnika z enako ploščino tudi enako sestavljiva. Še leta 1844 je Gerling dokazal, da sta polieder in njegova zrcalna podoba enako sestavljiva. Ideja je v bistvu enaka kot pri trikotniku. Trikotnik razrežemo na dele, ki (deltoide) so zrcalno simetrični. V prostoru pa polieder razrežemo v četverce, ki jih nato razrežemo v simetrične dele.



Da lahko četverec razrežemo na 6 simetričnih delov, je pokazal Jessen l. 1968. Podobno kot pri trikotniku, le da v prostoru včrtamo kroglo v četverec.







Če označimo dotikališča včrtane krogle z mejnimi ploskvami četverca z A1, B1, C1 in D1, potem priredimo vsakemu robu (kot primer vzemimo BC) polieder, ki ga tvorijo oglišča: B, C, D1, A1 in središče včrtane sfere.