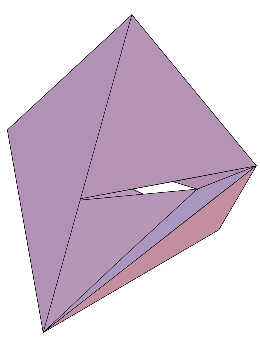
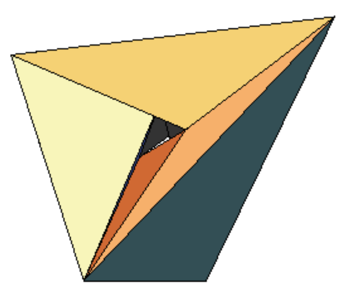
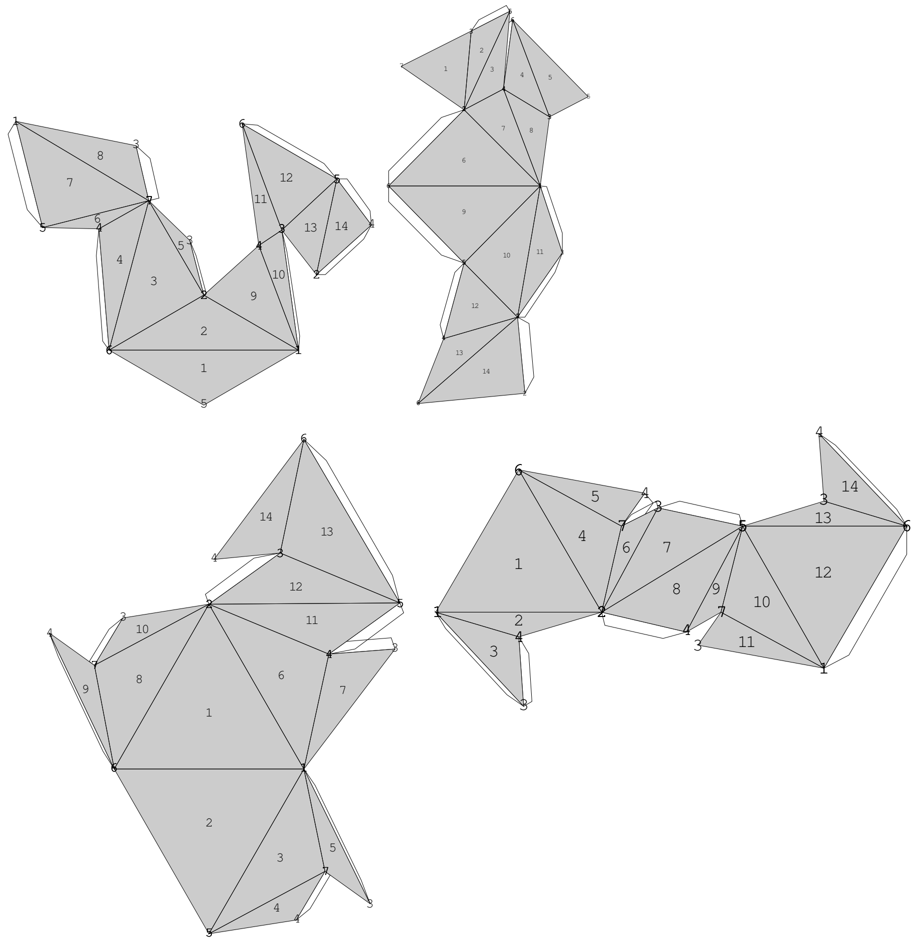
# Regularni toroidi

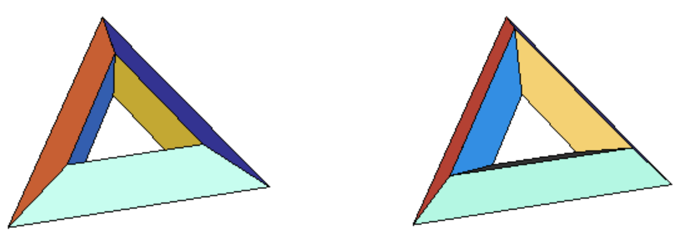
Če je polieder *pravilen*, potem se v vsakem oglišču sreča enako število robov in ima vsaka mejna ploskev enako število stranic. Polieder je *topološko* pravilen, če ne predpostavljamo nobenih drugih pogojev (na primer glede kotov ali robov). Seveda predpostavljamo, da so robovi ravne črte in mejne ploskve ravne površine. Predpostavili bomo tudi, da vsak rob meji na natanko dve mejni ploskvi. Polieder je enostaven, če je topološko ekvivalenten sferi. Za enostavne poliedre velja Eulerjeva formula: $V - E + F = 2$, kjer je V število oglišč, E število robov in F število mejnih ploskev. Z uporabo te formule se da dokazati, da obstaja samo pet enostavnih pravilnih poliedrov.
Polieder imenujemo toroid, če je topološko ekvivalenten torusu (kotaču). V tem primeru se Eulerjeva formula glasi: $V - E + F = 0$.
Toroid je regularen, če se v vsakem oglišču srečuje enako število robov in ima vsaka mejna ploskev enako število robov. Seveda pa ni nujno, da so vse mejne ploskve skladne. Torej gre za topološko regularnost.
Predpostavimo, da ima vsaka mejna ploskev a robov in da se v vsakem oglišču stika b robov. Oba produkta Fa in Vb sta enaka dvakratnemu številu robov. Zaradi Eulerjeve formule imamo: $2E/a+2E/b-E=0$. Ker je E pozitivno število, dobimo za pogoj tole diofantsko enačbo: $1/a+1/b-1/2=0$. Ker pa mora biti $a>2$ in $b>2$, s poiskusom ugotovimo, da ima ta enačba samo tri rešitve, ki določajo tri razrede toroidov:
razred T1: $a=3$, $b=6$;
razred T2: $a=4$, $b=4$;
razred T3: $a=6$, $b=3$.
Če imamo na razpolago veliko število mejnih ploskev (trikotnikov), potem ni težko konstruirati toroid razreda T1. V vsakem oglišču toroida razreda T1 se stika natančno 6 robov, zato mora imeti toroid vsaj 7 oglišč.
Csaszarov polieder (l. 1949–50) je toroid, ki ima samo 7 oglišč. Poljubni dve oglišči sta povezani z robom. Število oglišč je najmanjše možno ne le v razredu T1.
Bokowski in Eggert (1986) sta pokazala, da obstajajo 4 različice Csaszarovega poliedra.
Sledijo slike mrež vseh štirih različic. Mreže so dane tudi v prilogi.

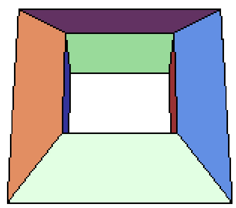
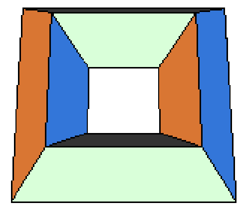






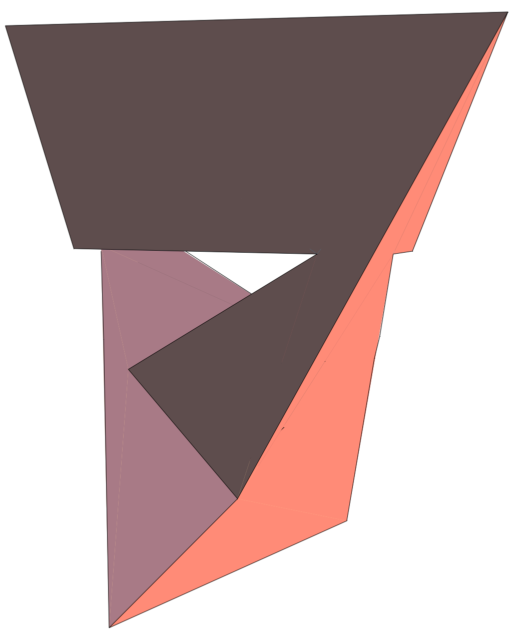
V razred T2 sodijo torusu podobni običajni poliedri. Mejne ploskve imajo 4 robove in v vsakem oglišču se stikajo štirje robovi. Najmanjše število mejnih ploskev je 9. Enako velja za oglišča.

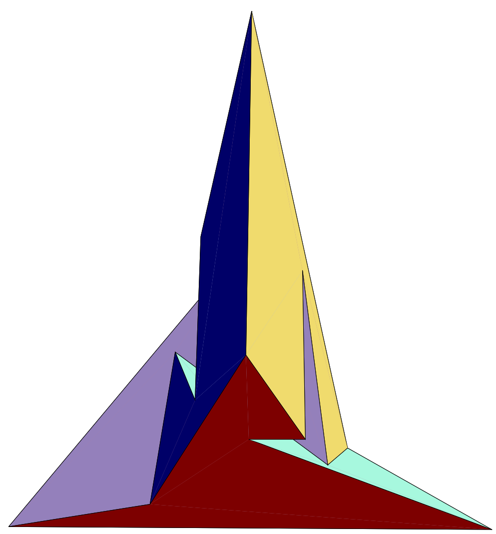


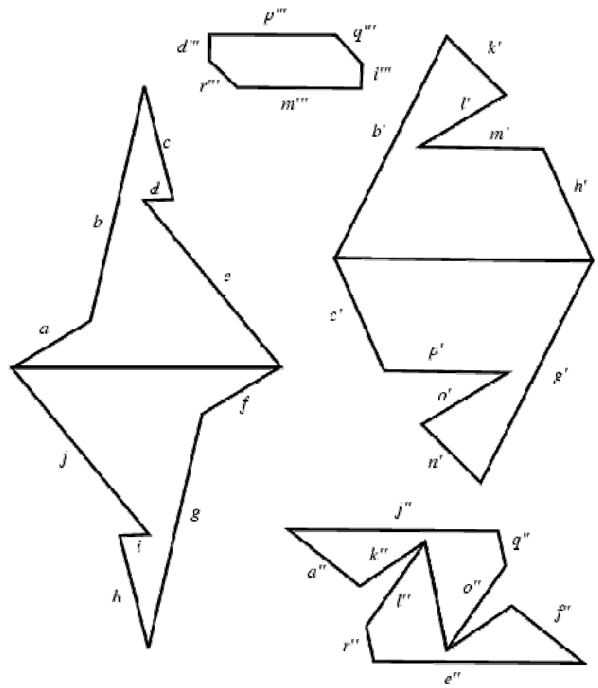
 

Ni znano, ali obstaja toroid razreda T2 z 10 ali 11 mejnimi ploskvami, čeprav ustrezni grafi obstajajo,(oziroma jih lahko narišemo na torusu).

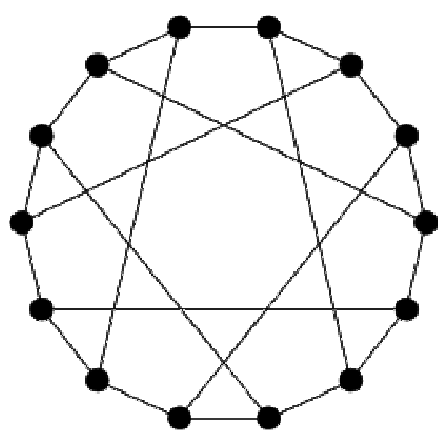
Toroid, iz sedmih mejnih ploskev, ki imajo vsaka z vsako skupen rob, se imenuje Szilassijev polieder (1977). Če hočemo pobarvati ta polieder tako, da ploskve, ki mejijo, niso iste barve, potrebujemo 7 barv.







Različni problemi so se pojavili v zadnjih dveh stoletjih v zvezi z barvanjem zemljevidov. Leta 1890 je Heawood dokazal, da je potrebno in zadostno število barv za barvanje zemljevidov na torusu 7 barv. Szilassijev polider je kombinatorno ekvivalenten Heawoodovemu grafu:



Literatura:

[1] Ace, T. "Szilassi Polyhedron." http://www.minortriad.com/szilassi.html.
[2] Eppstein, D. "Polyhedra and Polytopes." http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/polytope.html.
[3] Gardner, M. "Mathematical Games: In Which a Mathematical Aesthetic is Applied to Modern Minimal Art." *Sci. Amer.* **239**, 22-32, Nov. 1978.
[4] Gardner, M. *Fractal Music, Hypercards, and More Mathematical Recreations from Scientific American Magazine.* New York: W. H. Freeman, pp. 118-120, 1992.
[5] Hart, G. "Toroidal Polyhedra." http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/toroidal.html.
[6] Eric W. Weisstein. "Szilassi Polyhedron." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/SzilassiPolyhedron.html

*I.H.*